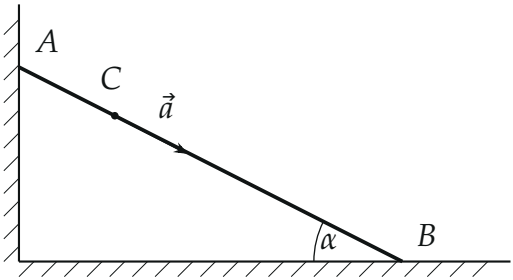
Стержень у стены и пола

Задача 4. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Жёсткий стержень AB движется под действием некоторых сил так, что его концы A и B скользят по вертикальной стене и горизонтальному полу соответственно (см. рисунок). В некоторый момент времени, когда стержень составляет угол α с полом, ускорение точки C, лежащей на расстоянии четверти длины стержня от точки A, направлено вдоль стержня вниз (см. рисунок) и равно по величине a_C. Найти ускорения концов стержня в этот момент.



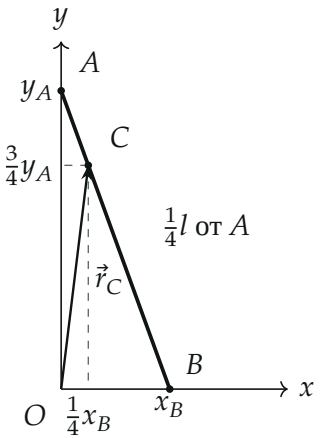
▲ **Решение. Что происходит.** Концы стержня скользят по стене и по полу, поэтому ускорение конца A направлено вдоль стены, а конца B — вдоль пола. Точка C лежит на стержне, и жёсткий стержень удерживает её в одном и том же месте отрезка: она делит AB в отношении $1:3$ в любой момент. Значит, радиус-вектор точки C выражается через радиус-векторы концов одной линейной формулой, и такая же формула связывает их скорости и ускорения. Остаётся записать её в проекциях на стену и пол — вектор ускорения C известен по направлению и величине. Класс задачи: кинематика жёсткого тела, связь ускорений точек стержня через радиус-векторы.

Обозначения. Начало координат O — в углу между стеной и полом, ось x — вдоль пола от стены, ось y — вдоль стены вверх; l — длина стержня; $\vec{r}_A = (0, y_A)$, $\vec{r}_B = (x_B, 0)$, $\vec{r}_C$ — радиус-векторы точек; $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$, $\vec{a}_C$ — их ускорения; a_A, a_B — модули ускорений концов.

1. Связь точек стержня. Вектор $\overrightarrow{AC}$ равен четверти вектора $\overrightarrow{AB}$, поэтому

$$\vec{r}_C = \vec{r}_A + \frac{1}{4}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \frac{3\vec{r}_A + \vec{r}_B}{4}.$$

В координатах: $x_C = \dfrac{x_B}{4}$ и $y_C = \dfrac{3y_A}{4}$ (на рисунке — проекции C на пол и на стену).



Точка C делит стержень AB в отношении $1:3$: её координаты — $\frac{3}{4}y_A$ и $\frac{1}{4}x_B$ (чертёж для $\alpha = 70°$)

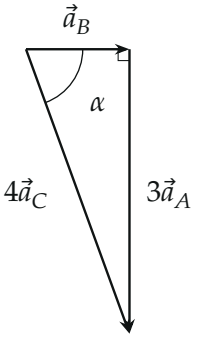
Это равенство верно в любой момент: пока стержень жёсткий, точка C делит его в том же отношении. Скорость — производная радиус-вектора по времени, ускорение — вторая производная, а формула линейна, поэтому

$$\vec{a}_C = \frac{3\vec{a}_A + \vec{a}_B}{4}.$$

2. Проекции на оси. Вектор $\vec{a}_A$ направлен вдоль стены (по оси y), $\vec{a}_B$ — вдоль пола (по оси x). Стержень идёт от A вниз к B и составляет угол α с полом, поэтому ускорение $\vec{a}_C$, направленное вдоль стержня вниз, имеет проекции $a_C\cos\alpha$ на ось x и $-a_C\sin\alpha$ на ось y. Запишем равенство $4\vec{a}_C = 3\vec{a}_A + \vec{a}_B$ в проекциях:

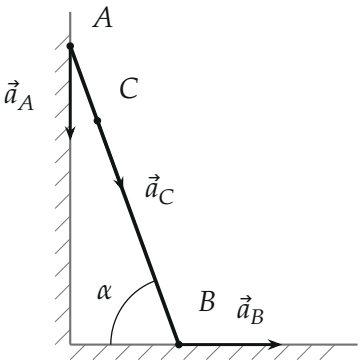
$$\begin{cases} 4a_C\cos\alpha = a_{Bx}, \\ -4a_C\sin\alpha = 3a_{Ay}. \end{cases}$$

Отсюда $a_{Bx} = 4a_C\cos\alpha > 0$ — конец B ускоряется по полу от стены; $a_{Ay} = -\dfrac{4}{3}a_C\sin\alpha < 0$ — конец A ускоряется вниз по стене.



Векторное равенство $4\vec{a}_C = 3\vec{a}_A + \vec{a}_B$: катеты — ускорения концов, гипотенуза параллельна стержню

Те же уравнения даёт треугольник на рисунке: $4a_C$ — гипотенуза, a_B и $3a_A$ — катеты, угол между гипотенузой и катетом a_B равен α (гипотенуза параллельна стержню, катет — полу). Поэтому $\cos\alpha = \dfrac{a_B}{4a_C}$ и $\sin\alpha = \dfrac{3a_A}{4a_C}$, что согласуется с проекциями.



Ускорения при $\alpha = 70°$ и $a_C = 1$ (длины в масштабе): $a_A = \frac{4}{3}\sin\alpha \approx 1{,}25$, $a_B = 4\cos\alpha \approx 1{,}37$

3. Ответ по модулям. $a_B = 4a_C\cos\alpha$ — вдоль пола от стены, $a_A = \dfrac{4}{3}a_C\sin\alpha$ — вдоль стены вниз.

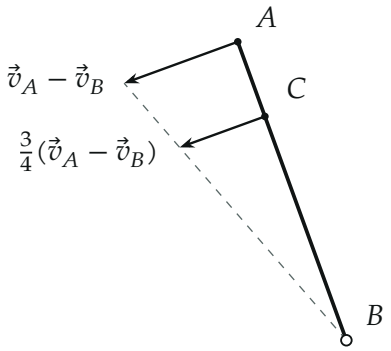
Обратите внимание: проекции ускорений концов на сам стержень *не равны* друг другу, в отличие от скоростей (там проекции

на стержень совпадают). Здесь $a_A \sin\alpha = \frac{4}{3} a_C \sin^2\alpha \approx 1{,}18\, a_C$, а $a_B \cos\alpha = 4 a_C \cos^2\alpha \approx 0{,}47\, a_C$ при $\alpha = 70°$. «Условие жёсткого стержня» для ускорений даёт неверный ответ.

Второй способ — через систему отсчёта конца B. В ней B покоится, а стержень поворачивается вокруг B, поэтому скорость каждой точки перпендикулярна стержню и пропорциональна расстоянию до B. Точка C отстоит от B на $\frac{3}{4}l$, точка A — на l:

$$\vec{v}_{C\,\text{отн.}B} = \frac{3}{4}\vec{v}_{A\,\text{отн.}B} = \frac{3}{4}(\vec{v}_A - \vec{v}_B).$$

В системе отсчёта земли $\vec{v}_C = \vec{v}_{C\,\text{отн.}B} + \vec{v}_B = \dfrac{3\vec{v}_A + \vec{v}_B}{4}$, и дифференцирование по времени даёт ту же формулу для ускорений.



В системе отсчёта конца B стержень поворачивается вокруг B: скорости пропорциональны расстоянию до B (концы стрелок лежат на одной прямой с B)

Замечание о положении стержня (ловушка рисунка условия). Дважды продифференцируем $x_B^2 + y_A^2 = l^2$: $x_B\, a_{Bx} + y_A\, a_{Ay} + v_A^2 + v_B^2 = 0$. С найденными ускорениями это даёт $v_A^2 + v_B^2 = 4 a_C l \left(\frac{1}{3}\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)$, а правая часть положительна только при $\tan\alpha > \sqrt{3}$, то есть $\alpha > 60°$. Поэтому описанная ситуация возможна только при $\alpha > 60°$ (рисунок в условии — схема, и мы взяли $\alpha = 70°$); найденные ускорения при этом от скоростей не зависят.

Проверка. Размерность: a_A и a_B — ускорения. Предельные случаи: $\alpha = 90^\circ$ (стержень вертикален, B в углу) даёт $a_B = 0$, $a_A = \frac{4}{3}a_C$, и это верно: $a_C = \frac{3}{4}a_A$ при неподвижном B; формально $\alpha \to 0$ даёт $a_A \to 0$, $a_B = 4a_C$, и снова $a_C = \frac{1}{4}a_B$ — формула ведёт себя разумно, хотя само движение при $\alpha < 60^\circ$ невозможно (см. замечание выше). Длины: $16a_C^2 = 9a_A^2 + a_B^2$ — тождество $16\sin^2\alpha + 16\cos^2\alpha = 16$ после подстановки. Численная проверка (python, движение с заданным $\alpha(t)$, вторая разность положения): $\vec{a}_C = (3\vec{a}_A + \vec{a}_B)/4$ совпадает до шести знаков. Смысл: C ближе к A, поэтому на $\vec{a}_C$ приходится $\frac{3}{4}$ вклада от A и $\frac{1}{4}$ от B, и чтобы получить заданное a_C, концы должны ускоряться заметно больше.

Ответ. $a_A = \dfrac{4}{3}\,a_C \sin\alpha$ (вдоль стены, вниз); $a_B = 4\,a_C \cos\alpha$ (вдоль пола, от стены).