Две заряженные полусферы

Задача 5. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Диэлектрическую сферу радиуса R, равномерно заряженную зарядом q, разрезали на две одинаковые части. Вторую диэлектрическую сферу радиуса $2R$, заряженную зарядом $3q$, также разрезали на две одинаковые части (см. левый рисунок). Затем половинку меньшей сферы и половинку большой расположили и удерживают так, как это показано на правом рисунке — у полусфер общий центр, а плоскости разреза перпендикулярны друг другу. Найти величину и направление силы взаимодействия полусфер.

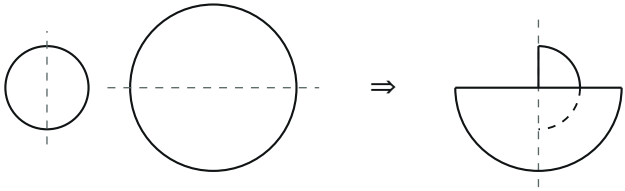


Рисунок к условию: слева — две сферы и плоскости разрезов, справа — полусферы с общим центром

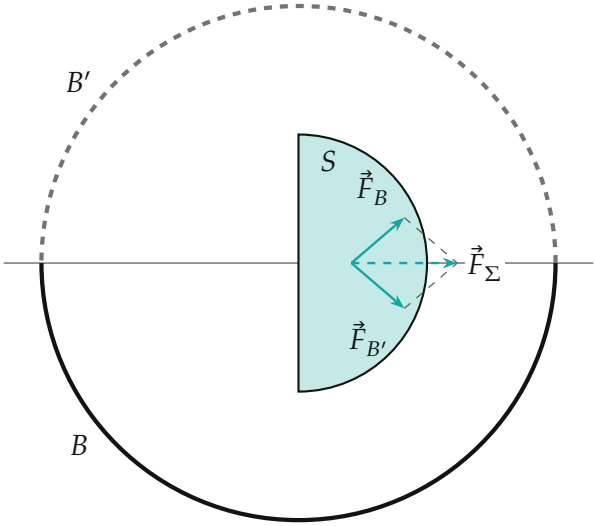
▲ **Решение.** **Что происходит.** Заряды распределены по полусферам, и силу между ними нельзя сложить «в лоб»: у каждой площадки своё направление силы. Помогают симметрия и теорема о поле сферы. Во-первых, внутри равномерно заряженной сферы поле равно нулю, поэтому две половины большой сферы действуют на малую полусферу равными по модулю и противоположными силами, и из этого следует, что искомая сила направлена перпендикулярно основанию большой полусферы. Во-вторых, снаружи такая сфера действует как точечный заряд в её центре, и задача сводится к силе между полусферой и точечным зарядом в её центре; эту силу уже считаем суммированием проекций сил от малых площадок. Класс задачи: симметрия и суперпозиция в электростатике, теорема Гаусса для сферы.

Обозначения. $Q = 3q$ — заряд большой сферы; B — большая полусфера (заряд $Q/2$), B' — вторая половина большой сферы (заряд $Q/2$); S

— малая полусфера (заряд $q/2$), S'' — вторая половина малой сферы. Заряд распределён равномерно по поверхности, заряды q и $3q$ одного знака. Ось z направим перпендикулярно основанию большой полусферы, ось x — вдоль него (основание малой полусферы — плоскость $x = 0$).

1. Сила на малую полусферу перпендикулярна основанию большой. Малая полусфера S целиком лежит внутри большой сферы $B + B'$. Внутри равномерно заряженной сферы поле равно нулю (теорема Гаусса), поэтому суммарная сила на любой заряд S от B и B' равна нулю: $\vec{F}_B + \vec{F}_{B'} = 0$ для сил на полусферу S целиком.

С другой стороны, половина B' получается из B отражением в плоскости основания B (плоскость $z = 0$), а сама S при таком отражении переходит в себя (основание S перпендикулярно плоскости отражения, а полушар симметричен относительно неё). Значит, сила $\vec{F}_{B'}$ — зеркальное отражение силы $\vec{F}_B$. Разложим $\vec{F}_B$ на составляющую F_n вдоль z и составляющую F_t вдоль основания. При отражении F_n меняет знак, F_t остаётся. Сумма $\vec{F}_B + \vec{F}_{B'}$ тогда равна $2F_t$, и она равна нулю: $F_t = 0$.

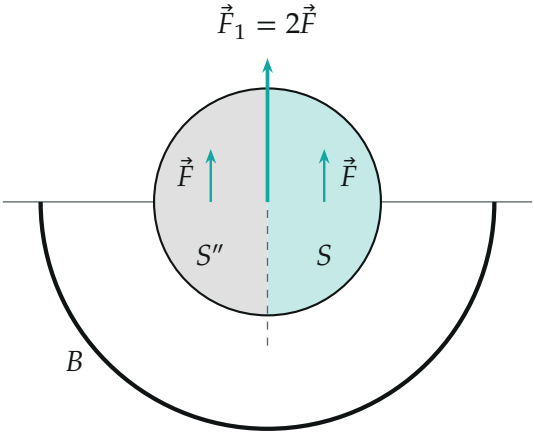


Сечение плоскостью xz: силы на S от B (сила $\vec{F}_B$) и от B' (сила $\vec{F}_{B'}$) — зеркальные образы друг друга; если бы у них была составляющая вдоль основания, их сумма $\vec{F}_\Sigma$ не была бы нулём

Значит, сила со стороны B на S перпендикулярна основанию B — направлена вдоль оси z.

2. Сведение к силе на всю малую сферу. Достроим малую полусферу S до целой сферы радиуса R второй половиной S''. Она зеркальна S в плоскости $x = 0$, и большая полусфера B симметрична относительно этой плоскости. Поэтому сила $\vec{F}_{B\to S''}$ — зеркальный образ силы $\vec{F}_{B\to S}$ в плоскости $x = 0$. По пункту 1 сила $\vec{F}_{B\to S}$ направлена вдоль z, а при отражении в плоскости $x = 0$ вектор вдоль z не меняется. Следовательно, силы на S и на S'' равны: $\vec{F}_{B\to S} = \vec{F}_{B\to S''} = \vec{F}$. Сила на целую малую сферу $\vec{F}_1 = 2\vec{F}$, и искомая сила

$$F = \frac{F_1}{2}.$$



Силы на S и на её зеркальную половину S'' от B равны; вместе они дают силу $\vec{F}_1$ на целую малую сферу

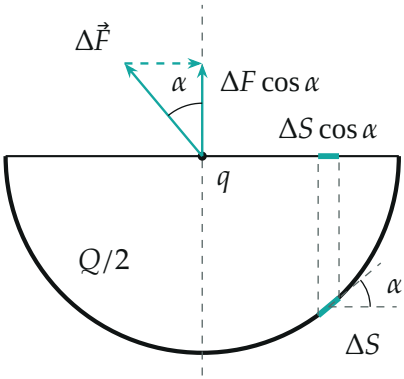
3. Малая сфера действует как точечный заряд. Поле равномерно заряженной сферы снаружи совпадает с полем точечного заряда в её центре, поэтому сфера радиуса R с зарядом q действует на полусферу B так же, как заряд q в центре O; по третьему закону Ньютона сила, с которой полусфера B действует на малую сферу, равна силе, с которой она действует на точечный заряд q в центре. Остаётся найти силу F_1

между полусферой радиуса $2R$ с зарядом $Q/2$ и точечным зарядом q в её центре.

4. Сила на точечный заряд от полусферы. Разобьём полусферу на малые площадки площадью ΔS. Заряд распределён равномерно, поэтому заряд площадки пропорционален её площади: $\Delta Q = \sigma \Delta S$, где $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi(2R)^2}$. Площадка находится на расстоянии $2R$ от центра, и по закону Кулона она отталкивает заряд q с силой

$$\Delta F = k\frac{q\,\Delta Q}{(2R)^2},$$

направленной вдоль радиуса от площадки к центру и дальше. По симметрии полусферы суммарная сила направлена вдоль оси симметрии z, поэтому достаточно сложить проекции $\Delta F \cos\alpha$ на ось; α — угол между радиусом площадки и осью.



Площадка ΔS полусферы действует на точечный заряд q в центре; α — угол радиуса с осью, он же угол площадки с основанием

Угол между радиусом и осью равен углу между площадкой (она перпендикулярна радиусу) и основанием (оно перпендикулярно оси), поэтому $\Delta S \cos\alpha$ — площадь проекции площадки на плоскость основания. Сложим проекции сил от всех площадок:

$$F_1 = \sum \Delta F \cos\alpha = \frac{kq\sigma}{(2R)^2}\sum \Delta S \cos\alpha.$$

Проекции всех площадок вместе дают круг основания: $\sum \Delta S \cos\alpha = \pi(2R)^2$. Тогда

$$F_1 = kq\sigma\pi = kq\,\frac{Q}{4\pi(2R)^2}\,\pi = \frac{kqQ}{16R^2}.$$

Знак словами: заряды одного знака, силы — отталкивания: полусфера B отталкивает точечный заряд вдоль оси от себя.

Второй способ (прямой интеграл). Кольцо на полусфере между углами α и $\alpha + d\alpha$ имеет площадь $2\pi(2R)^2 \sin\alpha\, d\alpha$, и все его площадки дают одинаковую проекцию на ось:

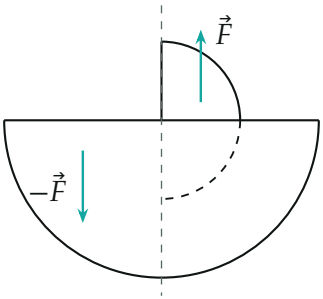
$$F_1 = \frac{kq\sigma}{(2R)^2}\int_0^{\pi/2} \cos\alpha \cdot 2\pi(2R)^2 \sin\alpha\, d\alpha = 2\pi kq\sigma \cdot \frac{1}{2} = \pi kq\sigma,$$

то же значение.

5. Ответ. Искомая сила равна половине F_1 (пункт 2):

$$F = \frac{F_1}{2} = \frac{kqQ}{32R^2} \;\Rightarrow\; F = \frac{3kq^2}{32R^2} \quad (Q = 3q).$$

Направление: перпендикулярно основанию большой полусферы. Малая полусфера отталкивается от большой — сила на неё направлена от большой полусферы вдоль оси (на рисунке условия — вверх), а на большую полусферу действует такая же по модулю сила в противоположную сторону (вниз).



Силы: $\vec{F}$ на малую полусферу, $-\vec{F}$ на большую

Обратите внимание: искомая сила не равна F_1: F_1 — сила на *целую* малую сферу (заряд q), а у полусферы заряд $q/2$. Именно поэтому в пункте 2 нужна симметрия: она показывает, что полусфера получает ровно половину.

Проверка. Размерность: kq^2/R^2 — сила. Предельный случай: если малую сферу заменить точечным зарядом q в центре, получится $F_1 = kqQ/(16R^2)$ — сила на целую малую сферу, и $F = F_1/2$ — на её половину. Численная проверка (python, $4 \cdot 10^6$ случайных пар точек на двух поверхностях, $k = 1$, $R = 1$, $q = 1$, $Q = 3$): сила на малую полусферу $F_z = 0{,}0937$ при $F_x, F_y \approx 10^{-4}$, формула даёт $3/32 = 0{,}09375$; сила на точечный заряд от большой полусферы $0{,}1875 = 3/16$ — совпадает с $kqQ/(16R^2)$. Смысл: сила на полусферу вдвое меньше силы на целую сферу, потому что заряд вдвое меньше, а сила от B на обе половины одинакова.

Ответ. $F = \dfrac{3kq^2}{32R^2}$, сила перпендикулярна основанию большой полусферы (отталкивание: на малую полусферу — от большой, на большую — противоположно).