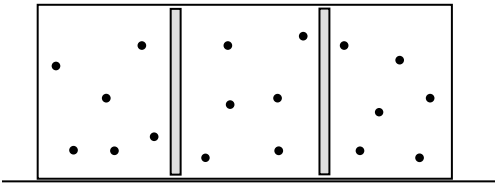
Поршни в горизонтальном цилиндре

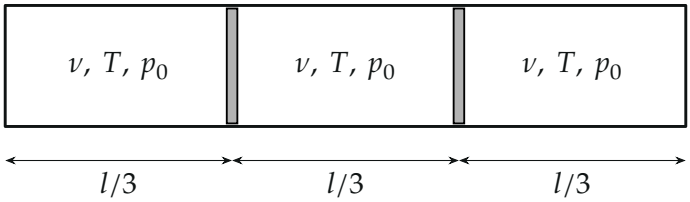
Задача 1. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 11 класс, задача 1] В горизонтальном цилиндрическом сосуде длиной l находятся два подвижных поршня, делящих сосуд на три герметичных отсека. В каждом отсеке содержится идеальный газ при одинаковой температуре, объёмы отсеков также одинаковы (см. рис.). Абсолютную температуру газа в левом отсеке увеличивают вдвое, в двух других температуру поддерживают неизменной. На сколько сместятся поршни?



▲ **Решение. Что происходит.** Нагретый газ слева стремится расшириться и давит на левый поршень, тот сжимает средний газ, средний давит на правый поршень. Все смещения идут вправо и прекращаются, когда давления в трёх отсеках снова становятся равными. Класс задачи — равновесие подвижных поршней: давление у соседних отсеков общее, температуры и количества вещества известны, и этого хватает, чтобы найти объёмы.

Обозначения. S — площадь сечения сосуда; $V = lS/3$ — начальный объём каждого отсека; T — начальная температура; p_0 — начальное давление; ν — число молей газа в отсеке; $\Delta x_\text{п}$ и $\Delta x_\text{л}$ — смещения правого и левого поршней вправо. Поршни считаем лёгкими и скользящими без трения, нагрев — медленным.

1. Одинаковое количество газа. Поршень в равновесии, если силы давления на него с двух сторон равны (сумма сил равна нулю). Поэтому в начальном состоянии давление во всех трёх отсеках одно и то же, p_0. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева $p_0V = \nu RT$ для каждого отсека: p_0, V, T у отсеков одинаковы, значит, одинаково и ν. Так вместо трёх неизвестных количеств вещества остаётся одно.

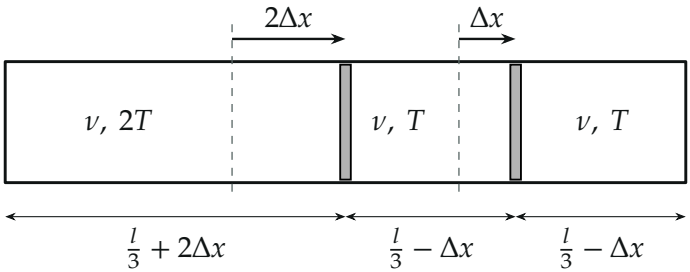


Начальное состояние: у трёх отсеков одинаковые объём V, температура T и давление p_0

2. Связь смещений. Пусть правый поршень сместился вправо на Δx. Правая стенка сосуда неподвижна, поэтому объём правого отсека стал $V - S\Delta x$. Средний и правый газ имеют одинаковые ν и T, и давление у них общее (между этими отсеками тоже стоит поршень). Из $p = \nu RT/V$ следует, что равны и объёмы: объём среднего отсека тоже $V - S\Delta x$. Полный объём сосуда не меняется, поэтому у левого отсека

$$V_л = 3V - 2\,(V - S\Delta x) = V + 2S\Delta x,$$

то есть левый поршень сместился на $\Delta x_л = 2\Delta x$. Левый поршень уходит вдвое дальше правого: он должен освободить место и для среднего, и для правого газа, которые сжались каждый на $S\Delta x$.



После нагрева: штриховые линии — прежние положения поршней; средний и правый отсеки одинаково сжаты

3. Равновесие левого и среднего газа. Давления в левом и среднем отсеках равны (условие равновесия левого поршня после нагрева). Выразим их из уравнения Клапейрона — Менделеева для каждого газа в

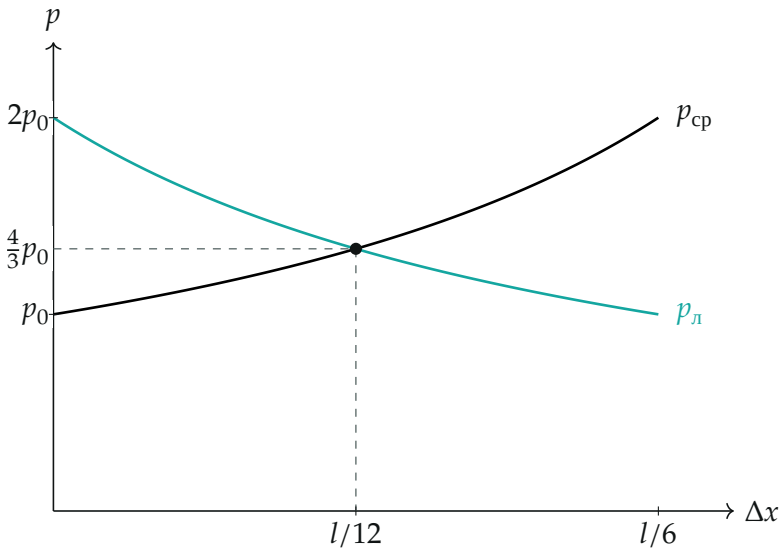
новом состоянии: слева температура $2T$ и объём $V + 2S\Delta x$, в середине температура T и объём $V - S\Delta x$:

$$\frac{\nu R \cdot 2T}{V + 2S\Delta x} = \frac{\nu RT}{V - S\Delta x}.$$

Неизвестные ν, R, T сокращаются: $2\,(V - S\Delta x) = V + 2S\Delta x$, откуда $V = 4S\Delta x$. Подставим $V = lS/3$:

$$\Delta x = \frac{V}{4S} = \frac{l}{12}, \qquad \Delta x_{\text{л}} = 2\Delta x = \frac{l}{6}.$$

Оба поршня сместились вправо: газ слева нагрет, его отсек увеличился, а два других сжались.



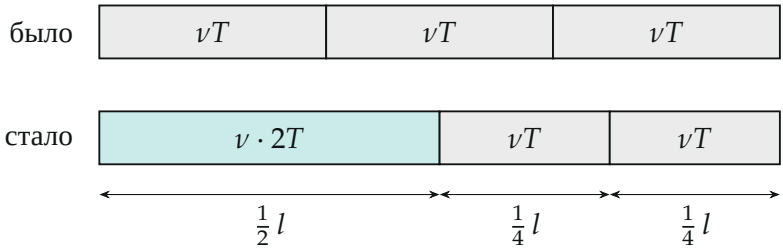
Давления левого и среднего газа в зависимости от смещения Δx правого поршня: поршни останавливаются там, где кривые пересекаются

Качественная картина та же: по мере смещения давление слева падает (отсек растёт), а в середине растёт (отсек сжимается), и в точке пересечения кривых оба газа давят на разделяющий их поршень одинаково. Общее давление после нагрева $p = \frac{4}{3}p_0$: оно не равно ни p_0, ни $2p_0$.

4. Проверка вторым способом. При равных давлениях из $p = \nu RT/V$ следует, что объёмы относятся как νT — произведения количества газа на температуру. У отсеков νT равны $2 : 1 : 1$ (слева температура $2T$), а сумма объёмов равна lS. Поэтому

$$V_{\text{л}} = \frac{2}{4}\,lS, \qquad V_{\text{ср}} = V_{\text{пр}} = \frac{1}{4}\,lS,$$

и длины отсеков $l/2$, $l/4$, $l/4$. Левый поршень был на расстоянии $l/3$ от стенки, стал — на $l/2$: сместился на $l/2 - l/3 = l/6$. Правый был на расстоянии $l/3$ от правой стенки, стал — на $l/4$: сместился на $l/3 - l/4 = l/12$. Совпадает с п. 3.



Доли объёма пропорциональны νT: левый отсек занимает половину сосуда, остальные — по четверти

Обратите внимание: поршни смещаются не поровну. Левый уходит вдвое дальше правого, потому что должен уступить место сразу двум сжатым газам. Ответ «$l/6$ и $l/12$» без этой связи не получить.

Проверка. Размерность: $\Delta x \sim l$ — длина. Сумма длин после нагрева $l/2 + l/4 + l/4 = l$. Общий случай: если температуру слева увеличить в k раз, то $V_{\text{л}} = \frac{k}{k+2}\,lS$, $V_{\text{ср}} = V_{\text{пр}} = \frac{1}{k+2}\,lS$ и смещения $\Delta x_{\text{л}} = \frac{2(k-1)}{3(k+2)}\,l$, $\Delta x_{\text{п}} = \frac{k-1}{3(k+2)}\,l$. При $k = 1$ (нагрева нет) смещений нет; при $k = 2$ получаем $l/6$ и $l/12$; при $k \to \infty$ левый газ занимает почти весь сосуд, а смещения стремятся к $2l/3$ и $l/3$ — два других отсека почти исчезают. Для нагретого вдвое отсека поршни сдвигаются на шестую и двенадцатую часть длины сосуда.

Ответ. Оба поршня смещаются вправо: правый на $\Delta x_{\text{п}} = l/12$, левый на $\Delta x_{\text{л}} = l/6$.