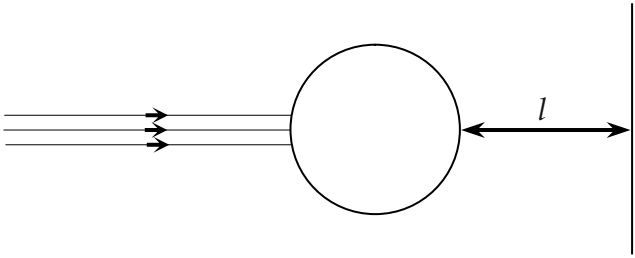
Пучок света на стеклянном шаре

Задача 2. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Параллельный пучок световых лучей радиуса $r = 0{,}5$ см падает на прозрачный шар радиуса $R = 10$ см. Показатель преломления вещества шара $n = 2$. За шаром на расстоянии $l = 20$ см от него расположен экран, перпендикулярный пучку. Найти радиус светлого пятна на экране.

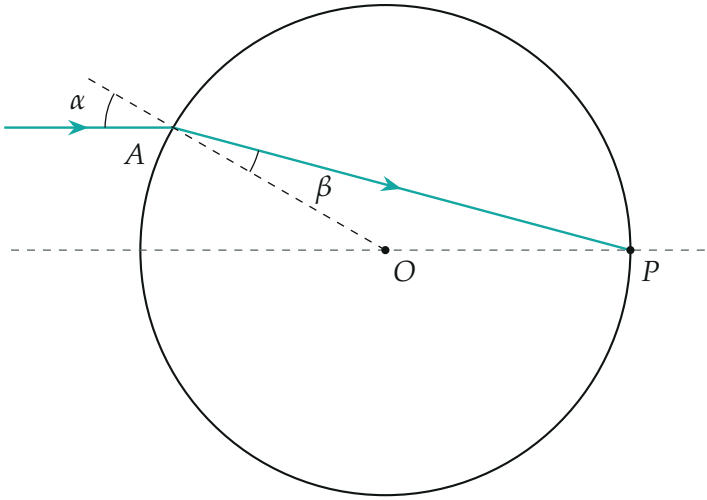


▲ **Решение.** **Что происходит.** Каждый луч пучка преломляется на передней поверхности шара, проходит внутри и выходит через заднюю. Пучок узкий ($r \ll R$), поэтому все углы малы, а при $n = 2$ преломление устроено так, что все лучи собираются в одной точке — на оси, на задней поверхности шара. Из этой точки они расходятся конусом, и радиус пятна на экране задаёт самый наклонный, то есть крайний луч пучка. Класс задачи — преломление при малых углах: $\sin\alpha \approx \alpha$.

Обозначения. O — центр шара; ось — прямая через O вдоль пучка; h — расстояние луча от оси ($0 \le h \le r$); A — точка падения луча на шар; α и β — углы падения и преломления в точке A; P — точка, где преломлённый луч пересекает ось; γ — угол, под которым луч выходит из шара; r_1 — радиус пятна.

1. Преломление на передней поверхности. Нормаль к поверхности шара в точке A — радиус OA. Запишем закон преломления для входа луча в шар: $\sin\alpha = n\sin\beta$. Пучок узкий, поэтому углы малы и $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\beta \approx \beta$ (углы в радианах). Так как $n = 2$,

$$\alpha = 2\beta, \qquad \text{то есть} \qquad \beta = \frac{\alpha}{2}.$$

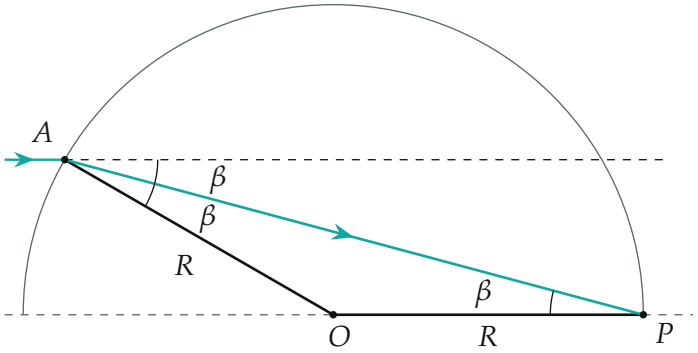


Вход луча в шар: нормаль — радиус OA, углы α и β отсчитываются от неё; углы на рисунке увеличены для наглядности

2. Все лучи приходят в одну точку оси. Падающий луч параллелен оси. Радиус OA образует с продолжением падающего луча за точкой A угол α (вертикальный с углом падения), а преломлённый луч идёт внутри этого угла и делит его на части β и $\alpha - \beta = \beta$: преломлённый луч делит угол пополам. Значит, он составляет с осью угол β (накрест лежащие углы при параллельных прямых). В треугольнике OAP углы при вершинах A и P равны β, поэтому он равнобедренный:

$$OP = OA = R.$$

Точка P лежит на оси на расстоянии R от центра, то есть на задней поверхности шара, и этот вывод не зависит от высоты h: у каждого луча пучка точка P одна и та же. Так выбор $n = 2$ делает шар «линзой», фокус которой лежит на самой задней поверхности.

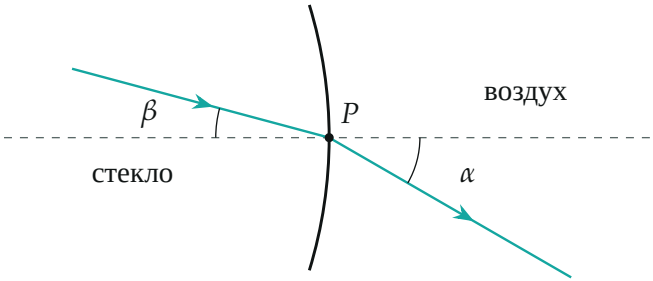


Равнобедренный треугольник OAP: углы при A и P равны β (угол пополам и накрест лежащие), значит, $OP = OA = R$

3. Выход из шара. В точке P нормаль к поверхности — радиус OP, то есть сама ось, а луч подходит к поверхности изнутри под углом β к нормали. Запишем закон преломления для выхода луча из шара в воздух: $n \sin\beta = \sin\gamma$. По закону из п. 1 $n \sin\beta = \sin\alpha$, поэтому

$$\sin\gamma = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \gamma = \alpha.$$

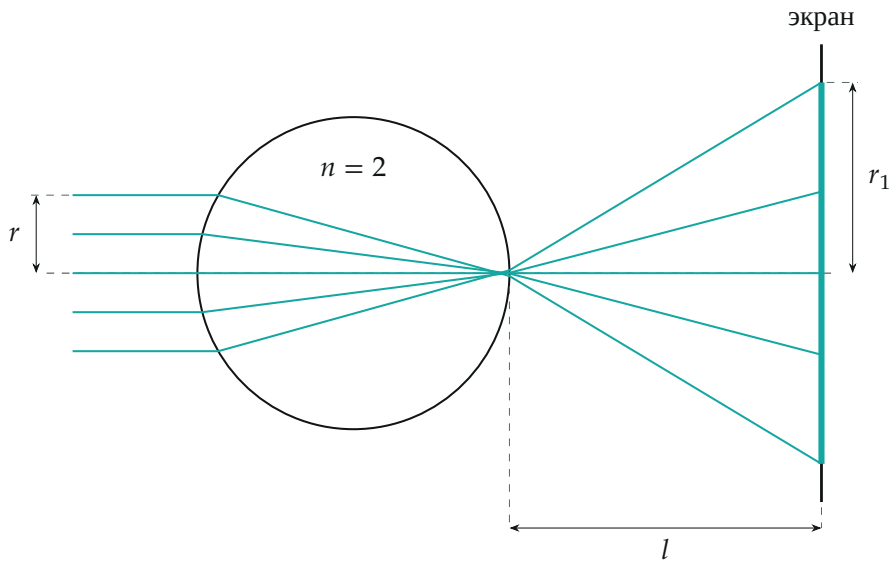
Луч выходит из точки P под тем же углом α к оси, под каким падал на шар: ход лучей симметричен. До оси луч шёл сверху вниз (при $h > 0$), поэтому после точки P он продолжает идти вниз под углом α, а лучи с $h < 0$ — вверх. Каждый луч пучка пересекает ось в одной и той же точке P и расходится из неё конусом.



Выход через заднюю поверхность в точке P: нормаль — ось, внутри луч идёт под углом β, снаружи — под углом α

4. Радиус пятна. Наибольший угол α у крайнего луча пучка ($h = r$): из прямоугольного треугольника с гипотенузой R и катетом r получаем $\sin\alpha_{\max} = r/R$, и при малом угле $\alpha_{\max} \approx r/R = 0{,}05$ рад. Все лучи выходят из одной точки на расстоянии l от экрана, поэтому крайний луч приходит на экран на расстояние $l\,\mathrm{tg}\,\alpha_{\max} \approx l\alpha_{\max}$ от оси; именно он ограничивает пятно:

$$r_1 = l\,\mathrm{tg}\,\alpha_{\max} \approx l\,\frac{r}{R} = \frac{20 \cdot 0{,}5}{10}\ \text{см} = 1\ \text{см}.$$



Ход лучей до экрана (расчёт по закону Снеллиуса, пучок для наглядности шире): они сходятся в точке задней поверхности, пятно — отрезок экрана между крайними лучами

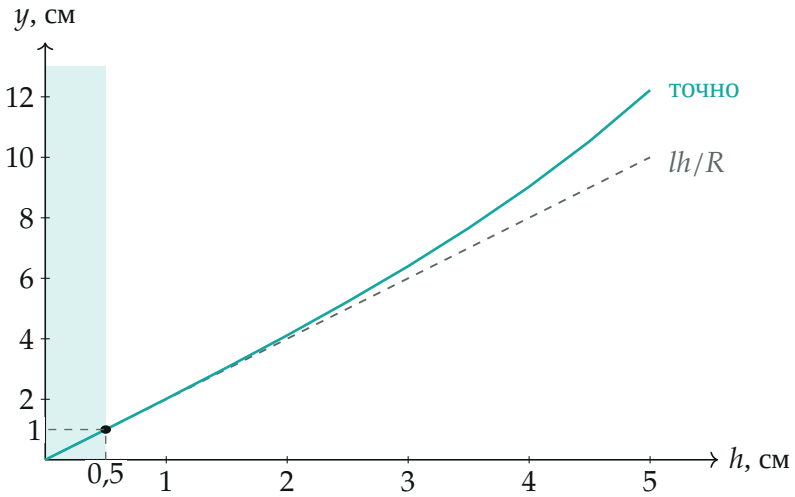
Пятно — круг: лучи с меньшими h приходят ближе к его центру.

Обратите внимание: лучи сходятся не на экране, а на задней поверхности шара, поэтому изображения на экране нет — есть пятно от расходящегося пучка. Радиус пятна $r_1 = l\,r/R$ вдвое больше радиуса пучка, но эта формула получена для $n = 2$: при другом показателе преломления лучи пересекают ось не на поверхности шара, и ответ был бы другим.

Проверка. Размерность: $l\,r/R$ — длина. Предел: $r \to 0$ даёт пятно-точку; $l \to 0$ (экран у задней поверхности) тоже даёт точку — туда сходятся все лучи.

Второй способ для ключевого шага (все лучи пересекают ось в одной точке). Для передней поверхности, которая преломляет параллельный пучок при малых углах, фокус находится на расстоянии $s' = \dfrac{nR}{n-1}$ от поверхности (формула одной сферической поверхности при бесконечном расстоянии до источника). При $n = 2$ это $s' = 2R$ — диаметр шара, то есть как раз задняя поверхность. Это то же, что получили в п. 2.

Точный расчёт хода лучей по закону Снеллиуса без замены синуса углом (на python) для $h = 0{,}5$ см даёт на экране 1,002 см — приближение $\sin\alpha \approx \alpha$ верно с запасом.



Положение на экране луча, вошедшего в шар на расстоянии h от оси: расчёт без упрощений и прямая lh/R; заливкой выделена область $h \le r$ — пучок из условия

Для широкого пучка ($h \sim R/2$) прямая и точный расчёт расходятся (сферическая аберрация), для узкого пучка из условия они совпадают. Узкий пучок радиуса 0,5 см шар превращает в пятно радиусом 1 см.

Ответ. $r_1 = \dfrac{l\,r}{R} = 1$ см.