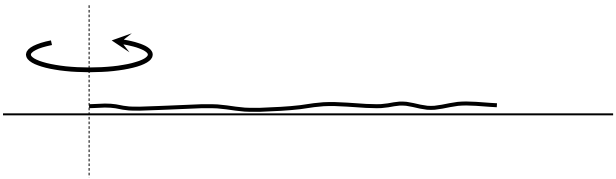
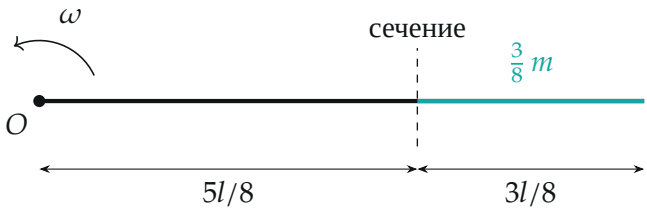
# Вращающаяся верёвка

**Задача 3.** [Росатом 2024/25, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Верёвку длиной $l$ и массой $m$, расположенную на гладком горизонтальном столе, вращают с угловой скоростью $\omega$ вокруг одного из её концов (см. рис.). Найти силу натяжения верёвки в сечении, находящемся на расстоянии $5l/8$ от оси вращения.



▲ **Решение. Что происходит.** Верёвка остаётся прямой вдоль радиуса и вращается с постоянной $\omega$: каждый её кусочек движется по окружности и нуждается в центростремительной силе. Стол гладкий, сила тяжести уравновешена реакцией стола, поэтому такую силу создаёт только натяжение. Значит, в сечении на расстоянии $r$ от оси натяжение должно «тянуть» к оси всю внешнюю часть верёвки — от $r$ до свободного конца, где натяжение равно нулю. Чем ближе к оси, тем больше масса снаружи и тем больше натяжение. Класс задачи — динамика по окружности для распределённой массы: второй закон Ньютона для малого элемента и суммирование по элементам.

**Обозначения.** $O$ — ось вращения; $r$ — расстояние от оси; $T(r)$ — натяжение в сечении на расстоянии $r$; $\mu = m/l$ — масса единицы длины верёвки.

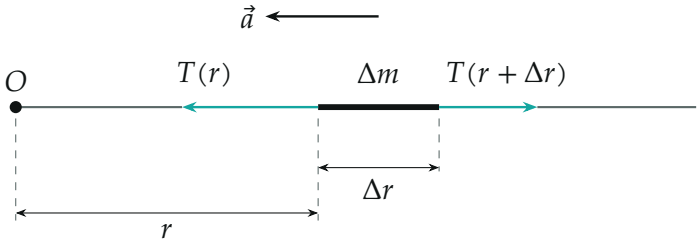


*Вид сверху: выделена внешняя часть верёвки от сечения $5l/8$ до свободного конца*

**1. Малый элемент верёвки.** Выберем элемент длиной $\Delta r$ на расстоянии $r$ от оси; его масса $\Delta m = \mu\,\Delta r$. Запишем второй закон Ньютона для элемента в проекции на ось, направленную вдоль радиуса к оси вращения: тогда в уравнение войдут только натяжения и центростремительное ускорение. Вертикальные силы (тяжесть и реакция стола) равны и уравновешивают друг друга, сил вдоль окружности нет (стол гладкий, верёвка прямая). Элемент движется по окружности радиуса $r$, его ускорение $a = \omega^2 r$ направлено к оси. Внутренняя соседняя часть верёвки тянет элемент к оси с силой $T(r)$, внешняя — от оси с силой $T(r+\Delta r)$:

$$\Delta m\,\omega^2 r = T(r) - T(r+\Delta r), \qquad \Delta m = \frac{m}{l}\,\Delta r.$$

Натяжение к оси растёт: разность справа положительна, $T(r) > T(r+\Delta r)$.




*Силы, действующие на малый элемент в проекции на радиальную ось: к оси тянет $T(r)$, от оси — $T(r+\Delta r)$; ускорение элемента $a = \omega^2 r$ направлено к оси*

**2. Суммирование по элементам.** Разобьём всю внешнюю часть верёвки — от сечения на расстоянии $r$ до свободного конца — на такие элементы и сложим уравнения. Справа от каждого элемента натяжение равно натяжению слева от следующего, поэтому в сумме разностей всё сокращается, и остаётся натяжение в самом внутреннем сечении минус натяжение на свободном конце. На свободном конце $T(l) = 0$ (за ним

нет ничего, что тянуло бы), поэтому

$$T(r) = \frac{m\omega^2}{l}\sum_i r_i\,\Delta r_i,$$

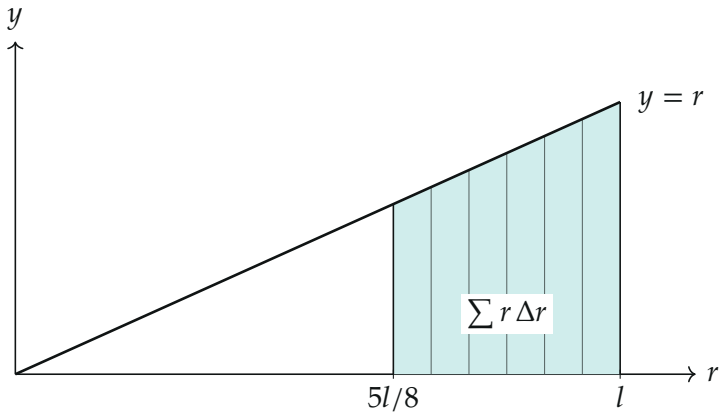
где сумма берётся по всем элементам от $r$ до $l$.

**3. Сумма как площадь.** Сумма $\sum r_i\Delta r_i$ — сумма площадей узких полосок высотой $r_i$ и шириной $\Delta r_i$ под графиком $y = r$ (так же считают работу переменной силы). Это площадь под прямой $y = r$ между $r = 5l/8$ и $r = l$, то есть трапеции с основаниями $5l/8$ и $l$ и высотой $3l/8$:

$$\sum_i r_i\Delta r_i = \frac{\frac{5l}{8} + l}{2}\cdot\frac{3l}{8} = \frac{13l}{16}\cdot\frac{3l}{8} = \frac{39}{128}\,l^2.$$

Подставим в результат п. 2:

$$T\left(\frac{5l}{8}\right) = \frac{m\omega^2}{l}\cdot\frac{39}{128}\,l^2 = \frac{39}{128}\,m\omega^2 l \approx 0{,}305\,m\omega^2 l.$$



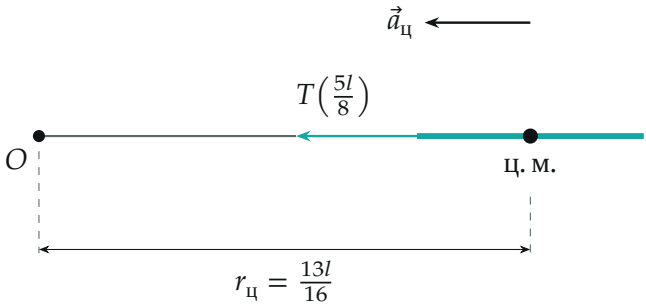

*Сумма $\sum r\,\Delta r$ — площадь трапеции под графиком $y = r$ между $r = 5l/8$ и $r = l$*

**4. Проверка другим способом: центр масс внешней части.** Рассмотрим участок верёвки от $5l/8$ до $l$. Его длина $3l/8$, масса $\Delta m = \frac{3}{8}m$,

центр масс на расстоянии $r_{\text{ц}} = \frac{1}{2}\left(\frac{5l}{8} + l\right) = \frac{13l}{16}$ от оси. Единственная сила, лежащая в плоскости вращения и действующая на участок, — натяжение $T(5l/8)$ в его внутреннем сечении (на свободном конце натяжения нет). Центр масс участка движется по окружности радиуса $r_{\text{ц}}$ с ускорением $\omega^2 r_{\text{ц}}$, и второй закон Ньютона для центра масс даёт

$$T\left(\frac{5l}{8}\right) = \Delta m\,\omega^2 r_{\text{ц}} = \frac{3}{8}\,m\,\omega^2 \cdot \frac{13l}{16} = \frac{39}{128}\,m\omega^2 l.$$

Результат тот же.

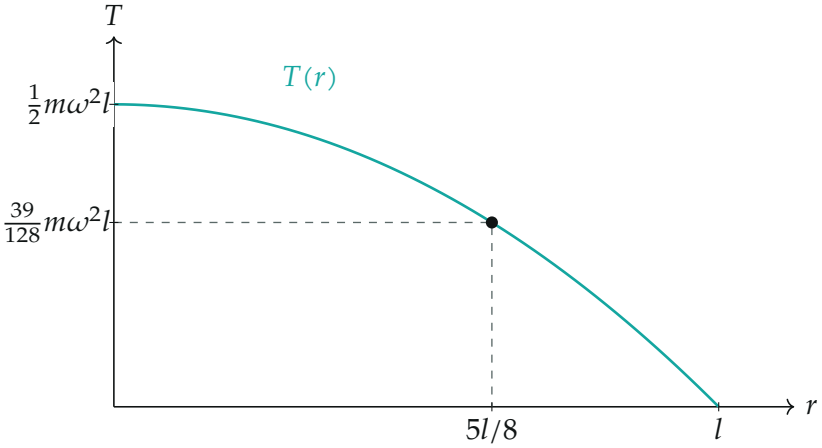



*Внешняя часть верёвки массой $\frac{3}{8}m$: единственная сила — натяжение $T(5l/8)$; центр масс вращается по окружности*

**5. Натяжение по всей длине.** Тот же расчёт для любого сечения $r$ даёт трапецию от $r$ до $l$: $\sum r_i \Delta r_i = \frac{l^2 - r^2}{2}$, откуда

$$T(r) = \frac{m\omega^2}{2l}\left(l^2 - r^2\right).$$

Натяжение максимально у оси и обращается в нуль на свободном конце. Для $r = 5l/8$ получаем $\frac{m\omega^2 l}{2}\left(1 - \frac{25}{64}\right) = \frac{39}{128}\,m\omega^2 l$, как и выше.




*Натяжение верёвки $T(r)$: у оси $\frac{1}{2}m\omega^2 l$, на расстоянии $5l/8$ — $\frac{39}{128}m\omega^2 l$, на свободном конце нуль*

Обратите внимание: натяжение верёвки не постоянно — оно разное в каждом сечении, и $T(5l/8)$ не равно ни $m\omega^2 \cdot \frac{5l}{8}$, ни $\frac{3}{8}m\omega^2 \cdot \frac{5l}{8}$: центр масс внешней части лежит не в её начале, а в середине, на $13l/16$.

**Проверка.** Размерность: $m\omega^2 l$ — $\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м} = \text{Н}$. Пределы: при $r \to l$ натяжение стремится к нулю (на свободном конце нет силы); при $r = 0$ получаем $T(0) = \frac{1}{2}m\omega^2 l = m\omega^2 \cdot \frac{l}{2}$ — это как раз сила, которой ось держит всю верёвку, чей центр масс на расстоянии $l/2$. Оба способа дали $\frac{39}{128}\, m\omega^2 l$. Натяжение с ростом $\omega$ растёт как $\omega^2$, как и должно быть у центростремительной силы.

**Ответ.** $T\left(\frac{5l}{8}\right) = \frac{39}{128}\, m\omega^2 l \approx 0{,}305\, m\omega^2 l.$