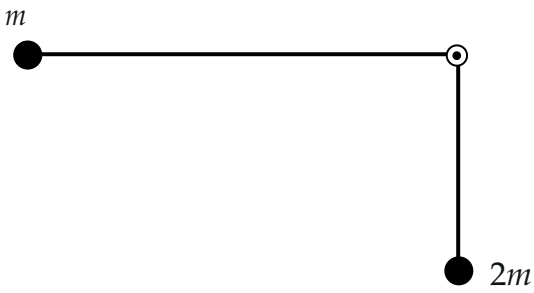
Изогнутый стержень на оси

Задача 4. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Два точечных тела с массами m и $2m$ укреплены на концах невесомого стержня, изогнутого под прямым углом, стороны которого отличаются в два раза по длине (см. рис.). Через вершину угла, образованного стержнем, перпендикулярно плоскости чертежа проходит горизонтальная ось, вокруг которой вся конструкция может вращаться как целое. В начальный момент стержень удерживают так, что его длинная сторона горизонтальна, короткая вертикальна (см. рис.), а затем отпускают. Найти силу, с которой стержень действует на ось вращения сразу после отпускания.



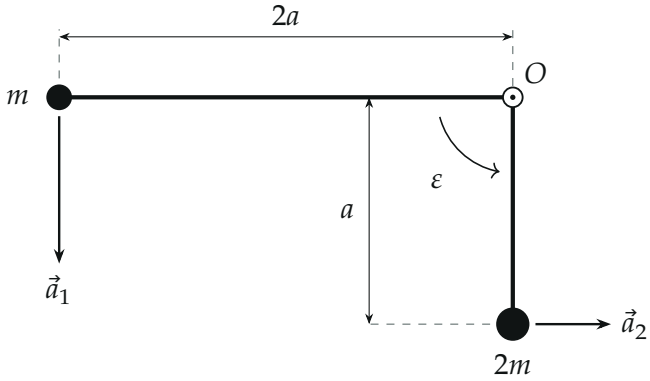
▲ **Решение. Что происходит.** Конструкция начинает вращаться вокруг оси O: тело m на длинной стороне уходит вниз, тело $2m$ на короткой стороне смещается вправо. Сразу после отпускания скорости равны нулю, поэтому у тел нет центростремительного ускорения, и их ускорения направлены по касательным к окружностям. Стержень невесомый, поэтому сумма сил на нём и сумма моментов относительно оси равны нулю. Идея: найти силы, с которыми стержень действует на тела, по третьему закону Ньютона получить силы тел на стержень, а затем из равенства нулю суммы сил на стержне найти силу оси. Класс задачи — динамика твёрдой конструкции в начальный момент: законы Ньютона для тел и условие невесомого стержня.

Обозначения. Короткая сторона a, длинная $2a$ (сама длина a в ответ не войдёт). Ось x направим вправо, ось y — вниз: на неё приходится

ускорение тела m. $\vec{T}_1$ — сила стержня на тело m, $\vec{T}_2$ — сила стержня на тело $2m$ с проекциями T_{2x} и T_{2y}; a_1 и a_2 — ускорения тел m и $2m$.

1. Направления ускорений и связь между ними. В начальный момент $v = 0$, поэтому центростремительное ускорение v^2/r равно нулю, и у каждого тела есть только касательное ускорение. Тело m движется по окружности радиуса $2a$ с центром O, касательная к ней в крайней левой точке вертикальна, и $\vec{a}_1$ направлено вниз. Тело $2m$ находится под осью, касательная в нижней точке окружности радиуса a горизонтальна, и $\vec{a}_2$ направлено вправо. Конструкция вращается как целое, у неё одно угловое ускорение ε, а касательное ускорение равно εr:

$$a_1 = \varepsilon \cdot 2a, \qquad a_2 = \varepsilon \cdot a \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2a_2.$$

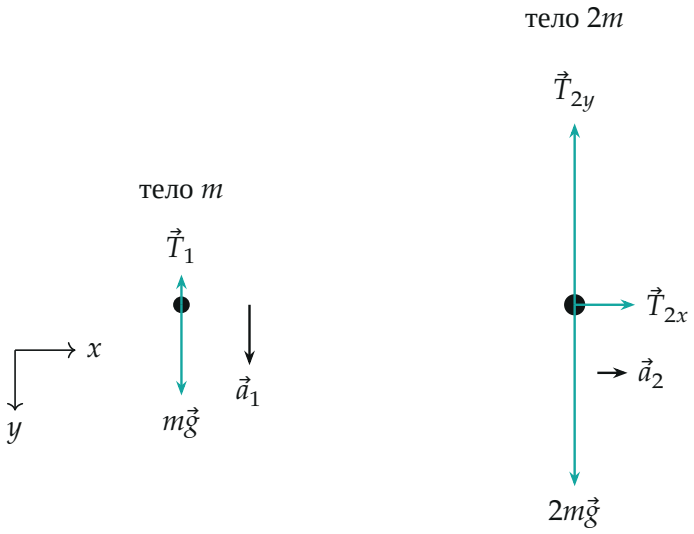


Сразу после отпускания: скорости нулевые, ускорения направлены по касательным и относятся как радиусы, $a_1 = 2a_2$

2. Второй закон Ньютона для тел. На тело m действуют тяжесть mg и сила стержня. Ускорение тела m вертикально, значит, горизонтальной силы на него нет: стержень действует на него только вертикально вверх, сила T_1. На тело $2m$ действуют тяжесть $2mg$ и сила стержня с составляющими T_{2x} (вправо) и T_{2y} (вверх). Ускорение тела $2m$ горизонтально, вертикальная проекция ускорения равна нулю. Проекции на x и y (ось

y вниз):

$$\begin{cases} ma_1 = mg - T_1, \\ 0 = 2mg - T_{2y}, \\ 2ma_2 = T_{2x}. \end{cases}$$



Силы и ускорения тел сразу после отпускания (отдельно для каждого тела; оси: x вправо, y вниз)

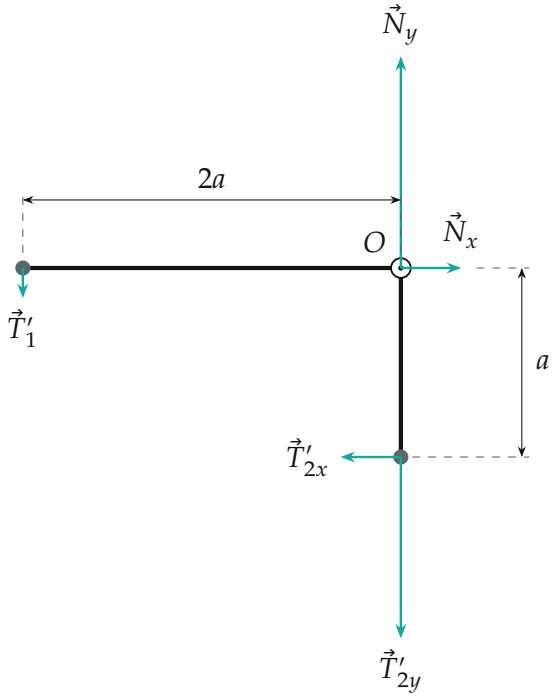
3. Условие для невесомого стержня. Стержень невесомый, поэтому сумма моментов сил на нём относительно оси O равна нулю (иначе при нулевом моменте инерции угловое ускорение было бы бесконечным). Силы на стержень со стороны тел по третьему закону Ньютона равны по модулю силам $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ и направлены противоположно. Линия действия T_{2y} проходит через ось (тело $2m$ точно под осью), её момент равен нулю. Плечо силы T_1 равно $2a$, плечо силы T_{2x} равно a:

$$T_1 \cdot 2a = T_{2x} \cdot a \quad \Rightarrow \quad T_{2x} = 2T_1.$$

4. Решение системы. Неизвестные a_1, a_2, T_1, T_{2x}, T_{2y}, уравнений пять: три из п. 2, связь $a_1 = 2a_2$ из п. 1 и $T_{2x} = 2T_1$ из п. 3. Из третьего уравнения п. 2 с учётом $T_{2x} = 2T_1$: $2ma_2 = 2T_1$, то есть $ma_2 = T_1$.

Из первого: $ma_1 = 2ma_2 = 2T_1 = mg - T_1$, откуда

$$T_1 = \frac{mg}{3}, \quad a_2 = \frac{g}{3}, \quad a_1 = \frac{2g}{3}, \quad T_{2x} = \frac{2mg}{3}, \quad T_{2y} = 2mg.$$



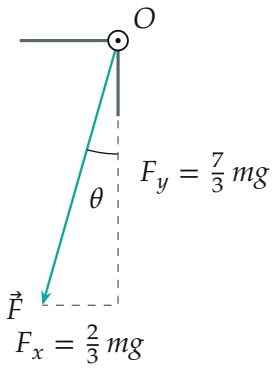
Силы на невесомый стержень: от тел (по третьему закону) и от оси; моменты относительно O: $T_1 \cdot 2a$ против часовой стрелки, $T_{2x} \cdot a$ по часовой

5. Сила на ось. Стержень невесомый, поэтому сумма сил на нём равна нулю: сила со стороны оси $\vec{N}$ уравновешивает силы тел на стержень. Силы тел на стержень: от тела m — T_1 вниз; от тела $2m$ — T_{2x} влево и T_{2y} вниз. Составляющие силы оси на стержень:

$$N_x = T_{2x} = \frac{2}{3}mg \quad \text{(вправо)},$$
$$N_y = T_1 + T_{2y} = \frac{mg}{3} + 2mg = \frac{7}{3}mg \quad \text{(вверх)}.$$

Стержень действует на ось с силой $\vec{F} = -\vec{N}$ того же модуля, направленной вниз и влево:

$$F = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}mg\right)^2 + \left(\frac{7}{3}mg\right)^2} = \frac{\sqrt{53}}{3}mg \approx 2{,}4\,mg.$$



Сила стержня на ось: $F = \frac{\sqrt{53}}{3}mg \approx 2{,}4\,mg$, направлена вниз и влево; $\operatorname{tg}\theta = F_x/F_y = 2/7$

6. Проверка другим способом. Рассмотрим всю конструкцию вместе с телами. Момент инерции относительно оси $I = m(2a)^2 + 2m\,a^2 = 6ma^2$. Момент силы тяжести тела m относительно оси $mg \cdot 2a$, у тела $2m$ плечо тяжести равно нулю. Основное уравнение вращения даёт угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{2mga}{6ma^2} = \dfrac{g}{3a}$, откуда $a_1 = 2a\varepsilon = \dfrac{2g}{3}$ и $a_2 = a\varepsilon = \dfrac{g}{3}$ — как в п. 4. Теперь второй закон Ньютона для системы тел: внешние силы — тяжесть $3mg$ и сила оси $\vec{N}$, а сумма $\vec{F}_{\text{внеш}} = m\vec{a}_1 + 2m\vec{a}_2$. В проекциях: $3mg - N_y = ma_1$ и $N_x = 2ma_2$, то есть $N_y = 3mg - \frac{2}{3}mg = \frac{7}{3}mg$, $N_x = \frac{2}{3}mg$ — те же составляющие.

Обратите внимание: силы стержня на тела не направлены вдоль сторон стержня: на тело m сила вертикальна, хотя сторона горизонтальна. Стержень жёстко изогнут, и его закрепление на оси воспринимает моменты, поэтому направления сил находятся из ускорений тел, а не «вдоль стержня». Второе: после отпускания нет центростремительных ускорений, поэтому в п. 2 нет членов v^2/r.

Проверка. Размерность: $F \sim mg$ — сила. Предел: если бы конструкция покоилась (удерживали), ось держала бы вес $3mg$ вертикально; в начальный момент конструкция разгоняется, центр масс системы ускоряется вниз, и вертикальная составляющая $N_y = \frac{7}{3}mg < 3mg$ — меньше веса, горизонтальная появляется потому, что тело $2m$ ускоряется вправо. Модуль $F \approx 2{,}43\,mg$ лежит между $\frac{7}{3}mg$ и $3mg$, как и должно быть.

Ответ. $F = \dfrac{\sqrt{53}}{3}\,mg \approx 2{,}4\,mg$ (вниз и влево; $F_x = \frac{2}{3}\,mg$, $F_y = \frac{7}{3}\,mg$).