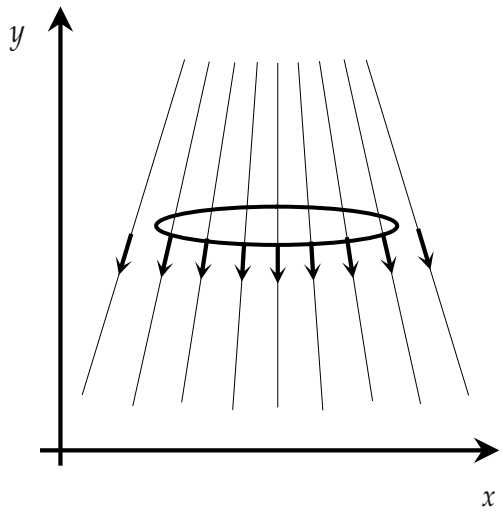
Кольцо падает в неоднородном магнитном поле

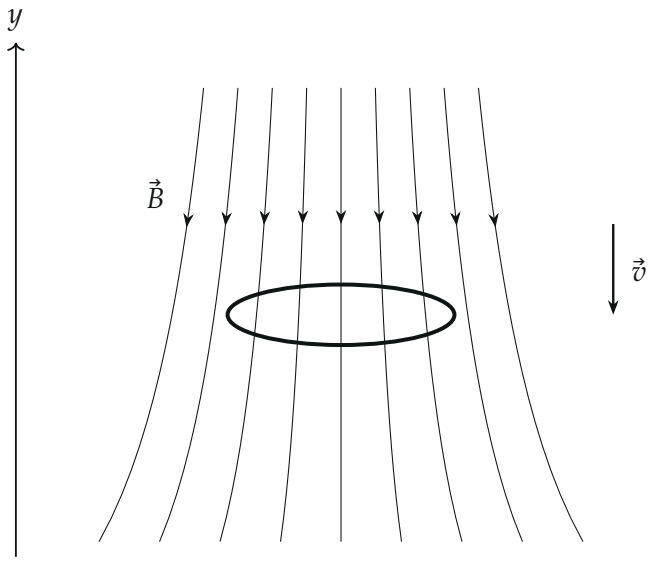
Задача 5. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Металлическое кольцо с массой m, радиусом r и сопротивлением R падает в поле силы тяжести, причём плоскость кольца остаётся горизонтальной в процессе падения. В области падения создано магнитное поле, обладающее осевой симметрией, причём вертикальная составляющая индукции магнитного поля $B_{\text{верт}}$ уменьшается с убыванием высоты по закону $B_{\text{верт}} = B_0\,(1 + \alpha y)$, где B_0 и α — известные постоянные, y — координата кольца по вертикальной оси. Найти скорость установившегося движения кольца. Центр кольца падает по оси симметрии магнитного поля.



▲ **Решение. Что происходит.** Кольцо падает в поле, которое слабеет вниз, поэтому поток индукции через кольцо убывает, и по закону Фарадея в нём возникает ток. Но если вертикальная составляющая поля меняется с высотой, то линии поля не могут быть строго вертикальными: они расходятся вниз, и у поля есть горизонтальная составляющая, направленная от оси. Ток в кольце течёт перпендикулярно этой составляющей, и сила Ампера оказывается вертикальной. По правилу Ленца она

тормозит падение. Чем быстрее падает кольцо, тем больше ток и сила Ампера, поэтому скорость перестаёт расти, когда сила Ампера сравнивается с силой тяжести — это и есть установившееся движение. Класс задачи — электромагнитная индукция: ЭДС → ток → сила Ампера → механика.

Обозначения. $S = \pi r^2$ — площадь кольца; $B(y) = B_0(1 + \alpha y)$ — вертикальная составляющая индукции (на рисунке направлена вниз); $B_{\text{гор}}$ — горизонтальная составляющая у кольца; I — ток в кольце; v — установившаяся скорость; F_A — вертикальная сила Ампера.



Линии поля, рассчитанные по закону $B_{верт} = B_0(1 + \alpha y)$: вниз они расходятся, значит, у поля есть составляющая, направленная от оси

1. ЭДС и ток. За малое время Δt кольцо опускается на $\Delta y = v\,\Delta t$. Поток через горизонтальное кольцо создаёт только вертикальная составляющая поля: $\Phi = B(y)\,S$ (горизонтальная составляющая лежит в плоскости кольца и потока не даёт). Изменение потока по модулю

$$\Delta\Phi = B(y)S - B(y - \Delta y)S = B_0\alpha\, v\,\Delta t\, S.$$

По закону электромагнитной индукции Фарадея ЭДС в кольце $\mathcal{E} =$

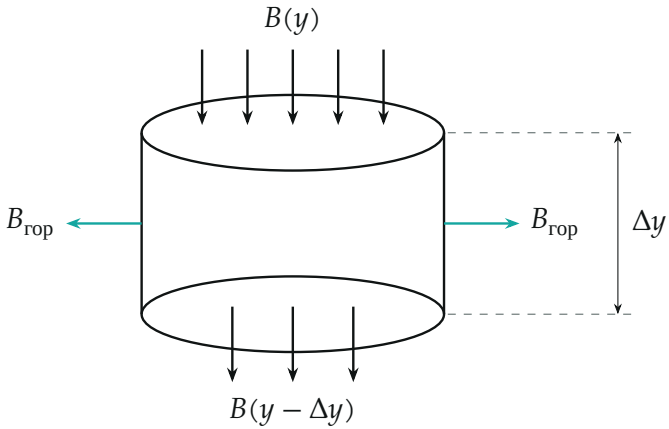
$\Delta\Phi/\Delta t = B_0\alpha v S$, а по закону Ома для кольца (самоиндукцией пренебрегаем)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B_0\alpha\, vS}{R}.$$

2. Горизонтальная составляющая поля. Магнитных зарядов нет, поэтому поток индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю. Построим цилиндр радиуса r, основаниями которого служат два положения кольца, отстоящие на Δy. Через верхнее основание поток входит внутрь, $B(y)S$, через нижнее выходит $B(y-\Delta y)S$, и разность $B_0\alpha\,\Delta y\,S$ должна выйти через боковую поверхность площадью $2\pi r\,\Delta y$, где горизонтальная составляющая направлена по радиусу и одинакова (симметрия):

$$B_0\alpha\,\Delta y\,\pi r^2 = B_{\text{гор}}\cdot 2\pi r\,\Delta y \quad\Rightarrow\quad B_{\text{гор}} = \frac{1}{2}B_0\alpha\, r.$$

Поток через боковую поверхность наружу: поле у кольца направлено от оси, как и показывают расходящиеся вниз линии.



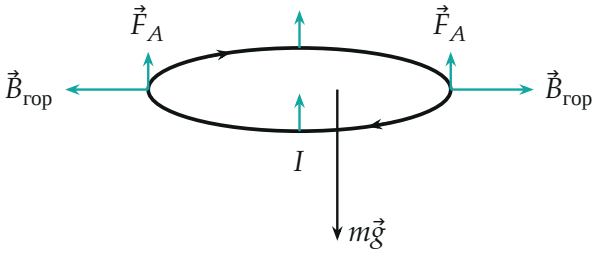
Замкнутая поверхность — цилиндр радиуса r на двух положениях кольца: поток входит через верхнее основание, выходит через нижнее и через боковую поверхность

3. Сила Ампера. Ток направлен по кольцу, а $B_{\text{гор}}$ — по радиусу, то есть перпендикулярно каждому элементу тока: сила Ампера на элемент

длиной Δl равна $B_{\text{гор}} I\,\Delta l$ и направлена вертикально. Вертикальная составляющая поля тоже действует на ток, но её сила лежит в плоскости кольца по радиусу, и по симметрии сумма таких сил равна нулю: на вертикальное движение влияет только $B_{\text{гор}}$. Направление. Поток вниз убывает, и по правилу Ленца индукционный ток создаёт внутри кольца поле вниз — при взгляде сверху ток идёт по часовой стрелке; для этого тока в поле, направленном от оси, силы Ампера всех элементов направлены вверх. Складывая силы по всей длине кольца $2\pi r$:

$$F_A = B_{\text{гор}}\, I \cdot 2\pi r = \frac{1}{2} B_0 \alpha r \cdot \frac{B_0 \alpha v S}{R} \cdot 2\pi r = \frac{\pi^2 B_0^2 \alpha^2 r^4}{R}\, v.$$

Сила Ампера направлена вверх и пропорциональна скорости: сила тормозит кольцо.



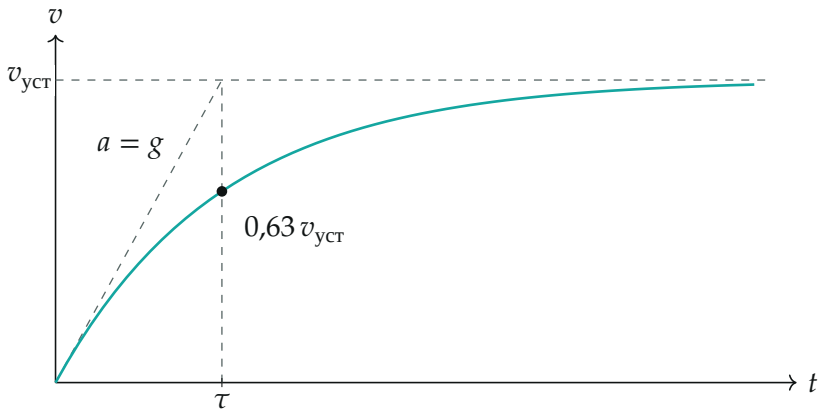
Вид сбоку на кольцо: ток по часовой стрелке (взгляд сверху), $\vec{B}_{гор}$ от оси, сила Ампера на каждый элемент направлена вверх; их сумма уравновешивает $m\vec{g}$ при установившейся скорости

4. Установившееся движение. Скорость перестаёт меняться, когда ускорение равно нулю: второй закон Ньютона для кольца в проекции на вертикальную ось даёт равенство силы тяжести и силы Ампера, $F_A = mg$. Подставим F_A из п. 3:

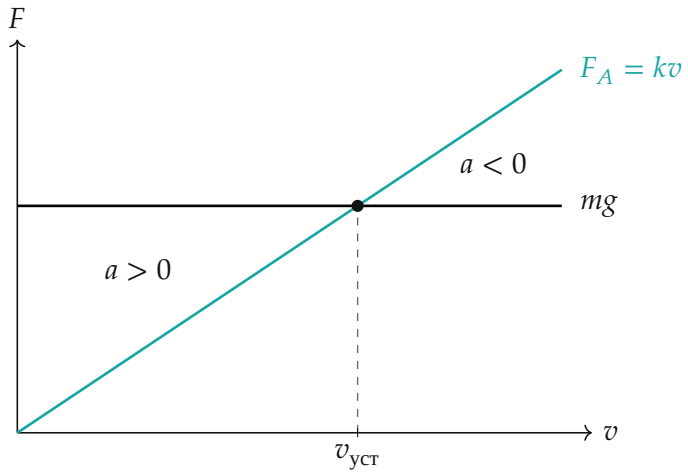
$$\frac{\pi^2 B_0^2 \alpha^2 r^4}{R}\, v = mg \quad \Rightarrow \quad v = \frac{mgR}{\pi^2 B_0^2 \alpha^2 r^4}.$$

Качественно установление выглядит так: v растёт → ЭДС и ток растут → сила Ампера $F_A = kv$ растёт ($k = \pi^2 B_0^2 \alpha^2 r^4 / R$) → ускорение $a =$

$g - kv/m$ падает до нуля. Уравнение $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$ с условием $v(0) = 0$ даёт $v = v_{\text{уст}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, где $v_{\text{уст}} = mg/k$ и $\tau = m/k = v_{\text{уст}}/g$: за время порядка τ скорость почти достигает $v_{\text{уст}}$.



Скорость падающего кольца: сначала $a = g$, затем ускорение падает, $v \to v_{уст}$; $\tau = v_{уст}/g$ — время, за которое v достигает 63 % от $v_{уст}$



Левее $v_{уст}$ сила тяжести больше силы Ампера и кольцо разгоняется, правее — тормозится; скорость сама приходит к $v_{уст}$

5. Проверка другим способом (энергия). При установившейся скорости кинетическая энергия кольца не меняется, поэтому вся работа силы тяжести за время Δt, равная $mgv\,\Delta t$, превращается в теплоту в кольце: $mgv = I^2R$. Работу силы Ампера отдельно считать не нужно: она отрицательна и по модулю равна тепловой мощности. Подставим $I = B_0\alpha vS/R$:

$$mgv = \frac{(B_0\alpha vS)^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{mgR}{B_0^2\alpha^2S^2} = \frac{mgR}{\pi^2B_0^2\alpha^2r^4}.$$

Тот же результат — без поля $B_{\text{гор}}$ и силы Ампера.

Обратите внимание: ток и торможение возникают не потому, что поле «есть», а потому, что оно неоднородно. При $\alpha = 0$ (однородное поле) поток не меняется, тока нет, и кольцо падает свободно, а формула даёт $v \to \infty$. Горизонтальная составляющая $B_{\text{гор}} = \frac{1}{2}B_0\alpha r$ не зависит от y и v: тормозит именно она, а вертикальная составляющая создаёт ЭДС, но вертикальной силы не создаёт.

Проверка. Размерность: $k = \pi^2B_0^2\alpha^2r^4/R$ имеет размерность Тл^2 · м^2/Ом = Н · с/м (сила на единицу скорости), и $v = mg/k$ — м/с. Пределы: $B_0\alpha \to 0$ или $R \to \infty$ (нет тока) — $v \to \infty$; $R \to 0$ (сверхпроводящее кольцо) — $v \to 0$: кольцо почти не падает, ток сильно тормозит. Большее сопротивление, меньший радиус, слабее градиент поля — слабее торможение и больше скорость.

Ответ. $v = \dfrac{mgR}{\pi^2B_0^2\alpha^2r^4}$.