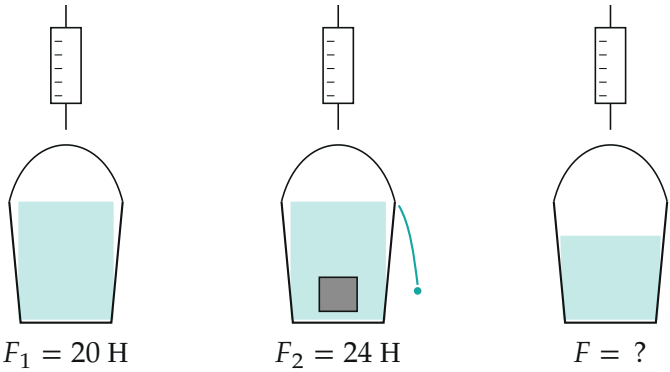
Ведёрко с камнем на динамометре

Задача 2. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 7 класс, задача 2] На динамометре висит ведёрко, заполненное до краев водой, при этом показание динамометра составляет $F_1 = 20$ Н. В ведёрко кладут камень, который полностью погружается в воду. В этом случае динамометр показывает $F_2 = 24$ Н. Каким будет показание динамометра, если камень вытащить из ведёрка? Плотность камня втрое больше плотности воды.



Поясняющий рисунок: ведёрко с водой до краёв; с камнем (лишняя вода вылилась); без камня

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на вес содержимого сосуда. Динамометр показывает вес всего, что на нём висит: ведёрко, вода и камень (силы давления воды на камень и камня на воду — внутренние силы системы, на показание не влияют). Когда камень опускают в полное ведёрко, из него выливается вода объёмом камня. Вынули камень — в ведёрке остаётся меньше воды, чем было сначала, на этот самый объём. Поэтому новое показание меньше F_1.

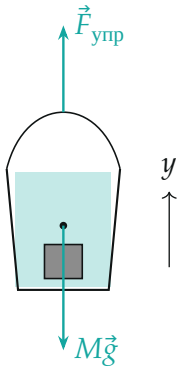
Обозначения. V — объём камня; ρ_0 — плотность воды, $\rho = 3\rho_0$ — плотность камня; $P_0 = \rho_0 V g$ — вес воды в объёме камня; F — искомое показание.

1. Почему динамометр показывает вес всего содержимого. Возьмём систему «ведёрко + вода + камень» (камень лежит в ней, покоится).

На неё действуют сила тяжести всей системы и сила упругости пружины $F_{\text{упр}}$ вверх. Первый закон Ньютона (система покоится) в проекции на вертикальную ось вверх:

$$F_{\text{упр}} - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{упр}} = Mg,$$

где M — масса всего, что висит на крюке. Выталкивающая сила, действующая на камень, — взаимодействие камня и воды, то есть внутренняя сила, в уравнение для всей системы она не входит.



Силы, действующие на систему «ведёрко + вода + камень»; ось y вверх

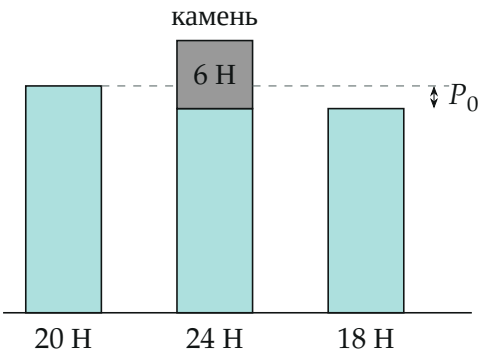
2. Опускаем камень. Ведёрко было полным, камень занял объём V — ровно столько воды вылилось. Масса содержимого изменилась на $\rho V - \rho_0 V$, и показание выросло на

$$F_2 - F_1 = (\rho - \rho_0)Vg = (3\rho_0 - \rho_0)Vg = 2\rho_0 Vg = 2P_0.$$

Отсюда вес воды в объёме камня

$$P_0 = \frac{F_2 - F_1}{2} = \frac{24 - 20}{2}\ \text{Н} = 2\ \text{Н}.$$

3. Вынимаем камень. Вода больше не выливается и не доливается: в ведёрке остаётся первоначальная вода без вытесненного объёма V, а уровень опускается.



Показания столбиками: бирюза — ведёрко с водой, серое — камень ($3P_0 = 6$ Н); без камня не хватает воды весом $P_0 = 2$ Н

Показание

$$F = F_1 - \rho_0 V g = F_1 - \frac{F_2 - F_1}{2} = \frac{3F_1 - F_2}{2} = 18 \text{ Н}.$$

Обратите внимание: ответ $F = F_1 = 20$ Н неверен — он забывает воду, вылившуюся при погружении камня. А разность $F_2 - F_1 = 4$ Н — это не вес камня (6 Н), а вес камня минус вес вытекшей воды.

Ответ.

$$F = \frac{3F_1 - F_2}{2} = 18 \text{ Н}.$$

Проверка. Размерность: все величины — силы, в ньютонах. Второй способ: показание с камнем $F_2 = F + P_{\text{камня}}$, а вес камня $P_{\text{камня}} = \rho V g = 3P_0 = 6$ Н, откуда $F = 24 - 6 = 18$ Н — то же. Предел: при $\rho \to \rho_0$ камень весит столько же, сколько вытесненная им вода, и $F_2 \to F_1$; формула $F = F_1 - P_0$ по-прежнему верна — без камня в ведёрке не хватает воды его объёма при любой плотности камня.

Ответ. $F = \dfrac{3F_1 - F_2}{2} = 18$ Н.