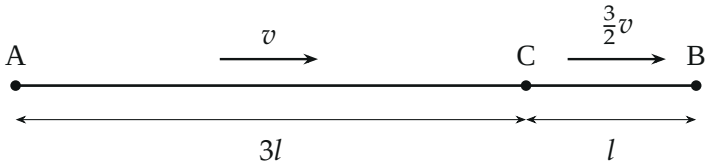
Средняя скорость на двух участках

Задача 3. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 7 класс, задача 3] Путь из города A в город B делится деревней C на два участка AC и CB, длины которых относятся как 3 : 1. Машина, двигаясь из A в B, на участке AC имела среднюю скорость v, а на участке CB — среднюю скорость $3v/2$. Найти среднюю скорость машины на всём пути AB, если в деревне C она не останавливалась. Найти также средние скорости машины за первую и вторую половины полного времени движения. $v = 50$ км/ч.



Поясняющий рисунок: длины участков и средние скорости на них

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на определение средней скорости: средняя скорость — весь пройденный путь, делённый на всё затраченное время, а не среднее арифметическое скоростей. Поэтому сначала найдём время на каждом участке. Для половин времени главное — понять, где машина находится в середине полного времени движения: на длинном медленном участке AC или уже на CB.

Обозначения. $3l$ и l — длины участков AC и CB; t_1, t_2 — время движения по ним; t — полное время; $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость на всём пути; $v_{\text{ср}1}$, $v_{\text{ср}2}$ — средние скорости за первую и вторую половины времени.

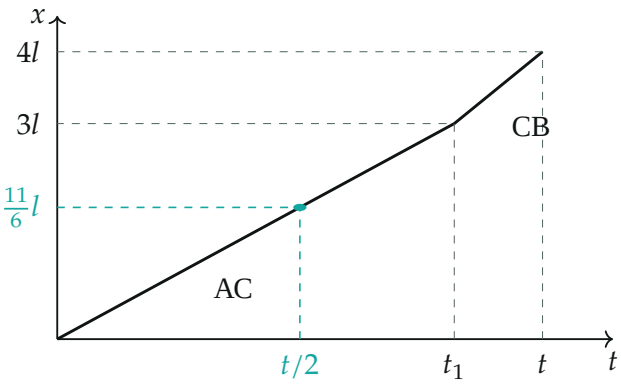
1. Время на участках. По определению средней скорости на участке время равно длине участка, делённой на среднюю скорость на нём:

$$t_1 = \frac{3l}{v}, \qquad t_2 = \frac{l}{3v/2} = \frac{2l}{3v}, \qquad t = t_1 + t_2 = \frac{3l}{v} + \frac{2l}{3v} = \frac{11\,l}{3v}.$$

Длинный участок машина проходит медленнее, поэтому на него уходит $t_1/t = 9/11$ всего времени.

2. Средняя скорость на всём пути.

$$v_{\text{ср}} = \frac{3l + l}{t} = \frac{4l}{11l/(3v)} = \frac{12}{11}v \approx 54{,}5 \text{ км/ч}.$$



Координата машины $x(t)$: на АС наклон v, на СВ наклон $\frac{3}{2}v$; середина полного времени (бирюза) приходится на участок АС

3. Где машина в середине времени. Половина полного времени

$$\frac{t}{2} = \frac{11\,l}{6v} < t_1 = \frac{3l}{v} = \frac{18\,l}{6v},$$

значит, всю первую половину времени машина едет по участку АС. За это время она проходит путь

$$s_1 = v \cdot \frac{t}{2} = \frac{11}{6}\,l,$$

что меньше $3l$ — до деревни С она ещё не доехала. Обратите внимание: середина времени и середина пути — разные точки. Середина пути ($2l$) тоже лежит на АС, но решать надо именно через время.

4. Средняя скорость за первую половину времени. Всю первую половину времени машина движется по АС. Как и организаторы, считаем, что на каждом участке машина едет равномерно (иначе путь к моменту

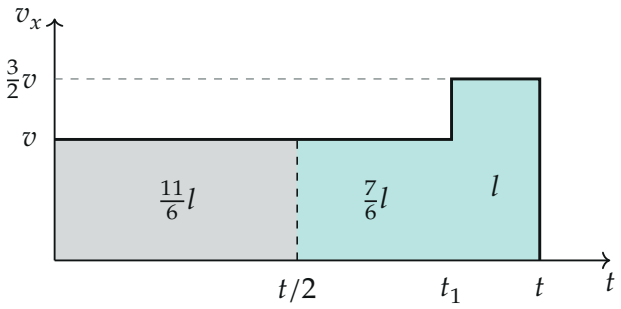
$t/2$ условием не определён). Тогда

$$v_{\text{ср1}} = \frac{s_1}{t/2} = v = 50 \text{ км/ч}.$$

5. Средняя скорость за вторую половину времени. За вторую половину времени машина проходит весь оставшийся путь:

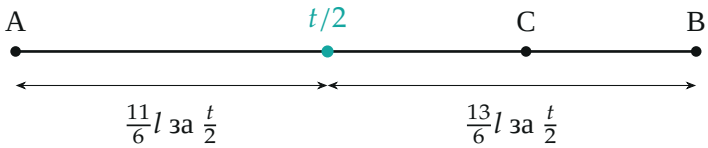
$$s_2 = 4l - \frac{11}{6}l = \frac{13}{6}l, \qquad v_{\text{ср2}} = \frac{s_2}{t/2} = \frac{13l/6}{11l/(6v)} = \frac{13}{11}v \approx 59{,}1 \text{ км/ч}.$$

Вторая половина состоит из конца медленного участка ($t_1 - t/2 = \frac{7l}{6v}$ со скоростью v) и всего быстрого участка ($\frac{2l}{3v}$ со скоростью $\frac{3}{2}v$); поэтому $v_{\text{ср2}}$ лежит между v и $\frac{3}{2}v$.



Скорость $v_x(t)$: путь — площадь под графиком. Серое — путь за первую половину времени, бирюза — за вторую: $\frac{7}{6}l + l = \frac{13}{6}l$

Ответ. $v_{\text{ср}} = \frac{12}{11}v \approx 54{,}5$ км/ч; за первую половину времени $v_{\text{ср1}} = v = 50$ км/ч; за вторую $v_{\text{ср2}} = \frac{13}{11}v \approx 59{,}1$ км/ч.



Положение машины в середине времени: за равные половины времени пройдены разные пути

Проверка. Средняя скорость за всё время — среднее арифметическое средних скоростей за две *равные по времени* половины: $\frac{1}{2}(v + \frac{13}{11}v) = \frac{12}{11}v$ — совпадает с пунктом 2. Все ответы лежат между v и $\frac{3}{2}v$, как и должно быть. Размерности — км/ч. Смысл: на всём пути средняя скорость ближе к v, потому что на медленном участке машина проводит $9/11$ всего времени.

Ответ. $v_{\text{ср}} = \dfrac{12}{11}v \approx 54{,}5$ км/ч; за первую половину времени $v_{\text{ср1}} = v = 50$ км/ч; за вторую половину времени $v_{\text{ср2}} = \dfrac{13}{11}v \approx 59{,}1$ км/ч.