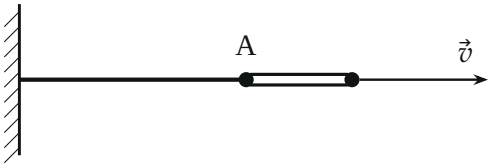
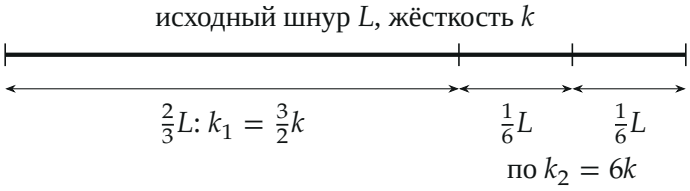
Комбинированный резиновый шнур

Задача 5. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 7 класс, задача 5] Жёсткость резинового шнура равна k. От шнура отрезают две трети длины, оставшуюся одну треть длины разрезают пополам и соединяют три полученные части первоначального шнура так, как это показано на рисунке: к концу длинной части привязывают две короткие части, вторые концы которых связывают друг с другом. Затем один из концов получившегося комбинированного шнура закрепляют, а второй тянут с постоянной скоростью v (см. рис.). Найти скорость точки соединения частей шнура (точка А на рисунке). Найти также жёсткость комбинированного шнура. Считать, что для любых удлинений шнура работает закон Гука.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на соединение пружин (резиновых шнуров по закону Гука). Длинная часть и пара коротких соединены последовательно: через них проходит одна и та же сила натяжения. Две короткие части между собой соединены параллельно: удлиняются одинаково, а сила делится пополам. Главная идея — жёсткость шнура обратно пропорциональна его длине; найдя жёсткости частей, получим и общую жёсткость, и то, какую долю общего удлинения даёт длинная часть, — это и есть отношение скоростей точки А и конца.

Обозначения. L — длина исходного шнура; k_1 — жёсткость длинной части ($\frac{2}{3}L$), k_2 — жёсткость каждой короткой части ($\frac{1}{6}L$); F — сила натяжения длинной части; x — перемещение свободного конца, x_1 — перемещение точки А от нерастянутого положения; k_0 — жёсткость комбинированного шнура.



Как разрезали шнур: длинная часть и две короткие, их жёсткости

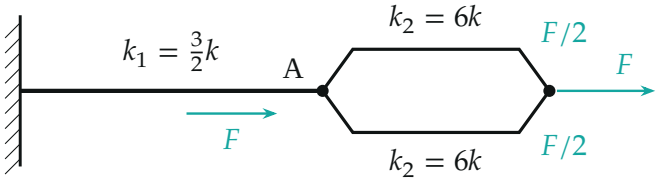
1. Жёсткость куска шнура. Растянем исходный шнур силой F; он удлинится на $\Delta l = F/k$. Сила натяжения одинакова по всей длине, а каждый кусок однородного шнура растягивается одинаково на единицу длины. Поэтому кусок длиной L/n удлиняется на $\Delta l/n$ при той же силе, и его жёсткость

$$k_{L/n} = \frac{F}{\Delta l/n} = nk.$$

Для наших частей: длинная ($n = \frac{3}{2}$) и короткие ($n = 6$):

$$k_1 = \frac{3}{2}k, \qquad k_2 = 6k.$$

2. Силы в частях. Шнуры невесомы, поэтому сила натяжения длинной части F передаётся в узел A и делится между двумя короткими частями. Короткие части одинаковы и растянуты на одну и ту же величину (их концы связаны в общих узлах), значит силы в них равны: по $F/2$.



Эквивалентная схема (короткие части разведены, чтобы было видно): длинная часть последовательно с парой параллельных коротких

3. Удлинения частей. Пусть свободный конец сместился на x, а точка A — на x_1. Левый конец закреплён, поэтому удлинение длинной части

равно x_1, а каждой короткой — $x - x_1$. Закон Гука для длинной части и для одной короткой:

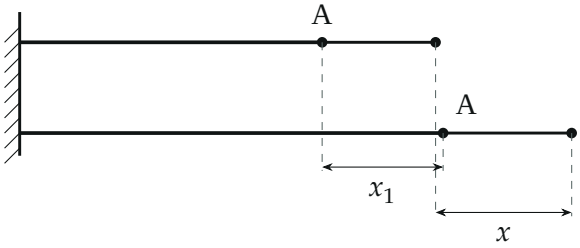
$$F = k_1 x_1, \qquad \frac{F}{2} = k_2\,(x - x_1).$$

4. Перемещение и скорость точки А. Исключим F:

$$\frac{3}{2}\,k\,x_1 = 2 \cdot 6k\,(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{27}{2}\,x_1 = 12\,x \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{8}{9}\,x.$$

Отношение $x_1/x = 8/9$ постоянно в любой момент растяжения (закон Гука — для любых удлинений), поэтому за любое малое время Δt точка А смещается на $8/9$ смещения конца, и её скорость

$$v_A = \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = \frac{8}{9}\,\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8}{9}\,v.$$



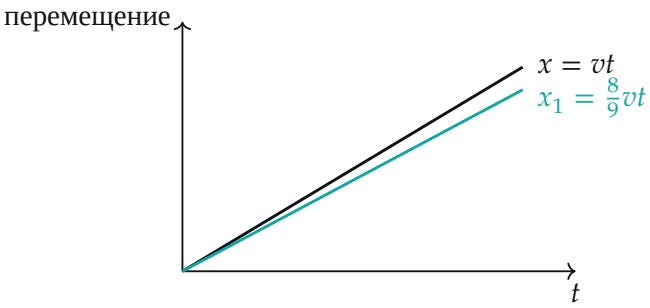
Шнур до и после растяжения (части нарисованы одной линией): точка А уходит на $x_1 = \frac{8}{9}x$

5. Жёсткость комбинированного шнура. Общее удлинение x при силе F на конце. Из пункта 3: $x_1 = F/k_1$, $x - x_1 = F/(2k_2)$, их сумма

$$x = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{2k_2} = F\left(\frac{2}{3k} + \frac{1}{12k}\right) = \frac{9F}{12k} = \frac{3F}{4k}, \qquad k_0 = \frac{F}{x} = \frac{4}{3}\,k.$$

Это правило последовательного соединения: $\dfrac{1}{k_0} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{2k_2}$, где $2k_2 = 12k$ — жёсткость пары параллельных частей.

Обратите внимание: из одного и того же шнура получилась более жёсткая конструкция ($\frac{4}{3}k > k$): короткие части стоят параллельно, и последняя треть шнура почти не тянется.



Конец и точка A движутся равномерно; наклоны графиков — скорости v и $\frac{8}{9}v$

Ответ. $v_A = \dfrac{8}{9}\,v$; жёсткость комбинированного шнура $k_0 = \dfrac{4}{3}\,k$.

Проверка. Размерность: отношения безразмерны, k_0 — в Н/м. Второй способ для скорости: удлинения последовательных частей обратно пропорциональны их жёсткостям, $x_1 : (x - x_1) = 12k : \frac{3}{2}k = 8 : 1$, значит точке A достаётся $\frac{8}{9}$ перемещения — то же. Предел: если бы короткие части были бесконечно жёсткими, точка A двигалась бы вместе с концом ($v_A = v$); у нас они очень жёсткие ($12k$ против $1{,}5k$), поэтому v_A близка к v.

Ответ. $v_A = \dfrac{8}{9}\,v$; жёсткость комбинированного шнура $k_0 = \dfrac{4}{3}\,k$.