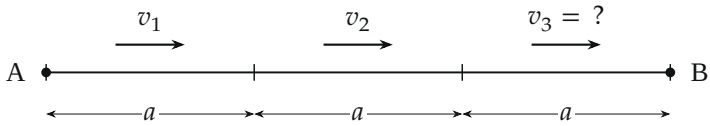
Автомобиль между городами

Задача 2. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 8 класс, задача 2] Путь между двумя городами A и B автомобиль прошёл следующим образом. Первый участок пути, длина которого составляет одну треть расстояния от A до B, автомобиль двигался с известной скоростью v_1. Второй участок пути, длина которого также составляет одну треть расстояния от A до B, автомобиль двигался с известной скоростью v_2. С какой постоянной скоростью автомобиль прошёл третий участок пути, если на движение по второму он затратил одну треть полного времени движения между городами A и B?



Поясняющий рисунок: путь A–B разделён на три равные части длины a

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равномерное движение по участкам. На каждом участке скорость постоянна, поэтому время участка — его длина, делённая на скорость. Условие задаёт долю второго участка не по пути, а по времени: он занял треть всего времени. Отсюда одно уравнение на неизвестную v_3. Заранее заметим: путь второго участка — треть всего пути, и время — треть всего времени, значит, v_2 равна средней скорости на всём пути.

Обозначения. a — треть расстояния A–B (длина каждого участка); t_1, t_2, t_3 — времена движения по участкам; t — полное время.

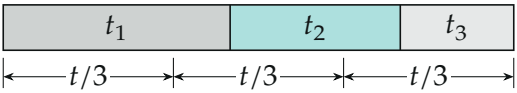
1. Времена участков. При равномерном движении $t = s/v$:

$$t_1 = \frac{a}{v_1}, \qquad t_2 = \frac{a}{v_2}, \qquad t_3 = \frac{a}{v_3}, \qquad t = t_1 + t_2 + t_3.$$

2. Условие на время второго участка. $t_2 = t/3$, то есть $3t_2 = t_1 + t_2 + t_3$, или

$$2t_2 = t_1 + t_3.$$

Время второго участка равно среднему арифметическому времён первого и третьего.



Шкала времени (пример $v_1 = 60$, $v_2 = 80$, $v_3 = 120$ км/ч): второй участок (бирюза) занимает ровно треть всего времени

3. Скорость на третьем участке. Подставим времена и сократим на a:

$$\frac{2}{v_2} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v_3} = \frac{2}{v_2} - \frac{1}{v_1} = \frac{2v_1 - v_2}{v_1 v_2},$$

$$v_3 = \frac{v_1 v_2}{2v_1 - v_2}.$$

4. Когда такое возможно. Скорость v_3 положительна, только если $2v_1 > v_2$. Физический смысл: даже при бесконечно быстром третьем участке ($t_3 \to 0$) второй занимает треть времени, только если $t_1 = 2t_2$, то есть $v_2 = 2v_1$. Если $v_2 \geqslant 2v_1$, второй участок проходится слишком быстро, и треть всего времени он не займёт ни при какой v_3.

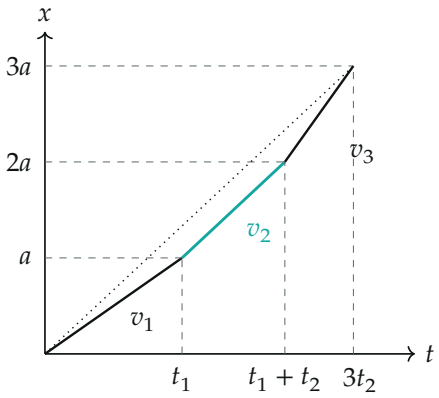


График $x(t)$ для того же примера: наклон бирюзового участка v_2 совпадает с наклоном пунктира — средней скоростью на всём пути

Обратите внимание: среднюю скорость нельзя считать средним арифметическим скоростей участков; верное соотношение — через времена, $\frac{2}{v_2} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3}$ (v_2 — среднее гармоническое v_1 и v_3).

Ответ.

$$v_3 = \frac{v_1 v_2}{2v_1 - v_2} \qquad (\text{возможно при } v_2 < 2v_1).$$

Проверка. Размерность: $\frac{(\text{м/с})^2}{\text{м/с}} = \text{м/с}$. Предел $v_1 = v_2$: получаем $v_3 = v_1$ — все скорости равны, и каждый участок занимает треть времени, верно. Пример $v_1 = 60$, $v_2 = 80$ км/ч: $v_3 = \frac{60 \cdot 80}{40} = 120$ км/ч; времена на $a = 1$ км — 1; 0,75; 0,5 мин, всего 2,25 мин, второй участок — ровно треть.

Ответ. $v_3 = \frac{v_1 v_2}{2v_1 - v_2}$; такое движение возможно при $v_2 < 2v_1$.