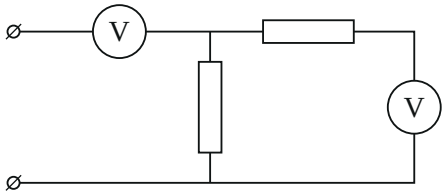
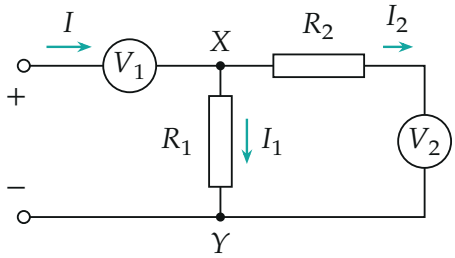
Цепь с двумя вольтметрами

Задача 3. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 8 класс, задача 3] В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, один из двух одинаковых вольтметров показывает напряжение $U_1 = 10$ В, второй — $U_2 = U_1/10$. Известно, что резисторы одинаковые и имеют сопротивление $R = 2$ кОм. Найти электрическое напряжение, приложенное к цепи, и сопротивление вольтметров.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на цепь с неидеальными приборами. Вольтметр — такой же резистор с сопротивлением r, только он ещё показывает напряжение на самом себе. Поэтому ток через вольтметр пропорционален его показанию: $I = U/r$. Сначала решим, какой вольтметр что показывает, затем запишем закон сохранения заряда для узла и закон Ома для двух параллельных ветвей.

Обозначения. V_1 — вольтметр на входе, V_2 — вольтметр в правой ветви; R_1 — вертикальный резистор, R_2 — горизонтальный ($R_1 = R_2 = R$); r — сопротивление вольтметра; X — узел, где сходятся V_1, R_1 и R_2; Y — нижний провод; U — напряжение, приложенное к цепи.



Обозначения и токи: ток I через V_1 в узле X делится на I_1 через R_1 и I_2 через R_2 и V_2

1. Кто что показывает. Ток через V_1 — это весь ток цепи I. В узле X он делится, и через V_2 идёт только часть: $I_2 < I$. У одинаковых вольтметров показание пропорционально току, поэтому V_2 показывает меньше, чем V_1. Значит, V_1 показывает $U_1 = 10$ В, V_2 — $U_2 = U_1/10 = 1$ В.

2. Токи. Закон Ома для вольтметров:

$$I = \frac{U_1}{r}, \qquad I_2 = \frac{U_2}{r} = \frac{I}{10}.$$

Закон сохранения заряда для узла X (сколько втекает, столько вытекает): ток через R_1

$$I_1 = I - I_2 = \frac{9}{10} I.$$

3. Сопротивление вольтметра. Ветви R_1 и $R_2 + V_2$ подключены к одним и тем же узлам X и Y, поэтому напряжения на них равны. По закону Ома для каждой ветви:

$$I_1 R = I_2 (R + r) \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{10} I R = \frac{1}{10} I (R + r) \quad \Rightarrow \quad r = 8R = 16 \text{ кОм}.$$

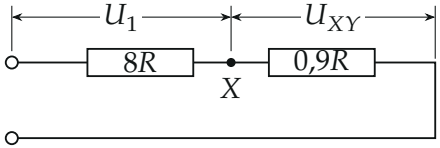
4. Напряжение на цепи. Вход цепи — последовательно V_1 и участок XY:

$$U = U_1 + U_{XY}, \qquad U_{XY} = I_1 R = \frac{9}{10} \cdot \frac{U_1}{r} \cdot R = \frac{9}{10} \cdot \frac{U_1}{8} = \frac{9}{80} U_1.$$

$$U = U_1 + \frac{9}{80} U_1 = \frac{89}{80} U_1 = \frac{89}{80} \cdot 10 \text{ В} \approx 11{,}1 \text{ В}.$$

Второй способ найти U — эквивалентная схема. Правая ветвь $R + r = 9R$ параллельна $R_1 = R$, вместе они дают $\dfrac{R \cdot 9R}{R + 9R} = 0{,}9R$, и последовательно с ними стоит V_1 с сопротивлением $8R$. Напряжения на последовательных участках относятся как их сопротивления:

$$\frac{U_{XY}}{U_1} = \frac{0{,}9R}{8R} = \frac{9}{80} \quad \Rightarrow \quad U = U_1 + \frac{9}{80} U_1 = \frac{89}{80} U_1.$$



Эквивалентная схема: вольтметр V_1 ($8R$) последовательно с параллельными ветвями ($0{,}9R$)

Обратите внимание: в официальном решении напряжение сложено как $U_1 + U_2 + U_{R_2} = U_1 + \frac{U_1}{10} + \frac{U_1}{80}$ — это обход через правую ветвь, он даёт то же $U_{XY} = \frac{9}{80}U_1$.

Ответ.

$$U = \frac{89}{80}\,U_1 \approx 11{,}1\ \text{В}, \qquad r = 8R = 16\ \text{кОм}.$$

Проверка. Размерность: U — в вольтах, r — в омах. Подстановка: $I = 10/16000 = 0{,}625$ мА; $I_2 = 0{,}0625$ мА, напряжение на правой ветви $0{,}0625 \cdot 18 = 1{,}125$ В, на R_1: $0{,}5625 \cdot 2 = 1{,}125$ В — совпадают. Предел: при $r \to \infty$ (идеальные вольтметры) ток в цепи исчез бы, V_1 показал бы всё U, а V_2 — нуль; показания 10 и 1 В возможны только потому, что вольтметры потребляют ток.

Ответ. $U = \frac{89}{80}\,U_1 \approx 11{,}1$ В; сопротивление вольтметра $r = 8R = 16$ кОм.