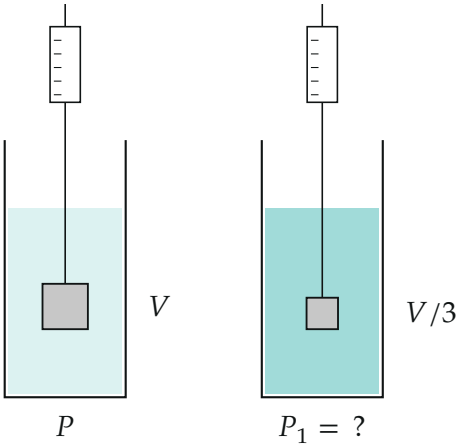
Растворяющийся кристалл соли

Задача 5. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 8 класс, задача 5] Для облицовки стен в саунах, банях и спа-салонах используют плитки из гималайской соли, которая добывается в Пакистане и представляет собой монокристалл поваренной соли, образовавшейся 250 миллионов лет назад на месте древнего моря. Тело из кристалла гималайской соли подвесили к динамометру и опустили в пробирку с водой, объём которой вчетверо больше объёма тела, и которая полностью его покрывает. При этом динамометр показал вес $P = 0{,}27$ Н. Затем две трети объёма тела растворились. Будет ли вес оставшегося кристалла соли в воде отличаться от $P/3$, и если да, то на сколько и в какую сторону (больше или меньше)? Считать, что объём раствора равен сумме объёмов воды и соли.



Поясняющий рисунок: кристалл объёма V в воде; после растворения двух третей — кристалл $V/3$ в растворе (раствор плотнее воды)

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на закон Архимеда. Динамометр в воде показывает разность силы тяжести кристалла и выталкивающей силы. Если бы жидкость не менялась, обе силы уменьшились бы втрое вместе с объёмом, и вес стал бы ровно $P/3$. Но растворённая соль остаётся в пробирке: раствор плотнее чистой воды, выталкивающая сила на оставшийся кристалл больше, чем в чистой воде. Значит, вес остатка *меньше* $P/3$. Найдём на сколько.

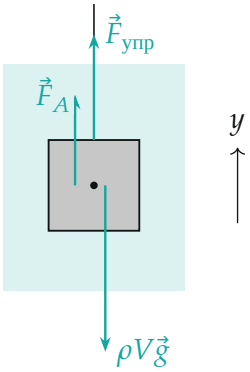
Обозначения. V, ρ — объём и плотность кристалла; ρ_0 — плотность воды; ρ_1 — плотность раствора после растворения; P_1 — вес остатка в растворе; $\vec{F}_{\text{упр}}$ — сила со стороны пружины динамометра, $\vec{F}_A$ — выталкивающая сила.

1. Вес кристалла в воде. Запишем первый закон Ньютона для кристалла (он покоится) в проекции на вертикальную ось y вверх:

$$F_{\text{упр}} + F_A - \rho V g = 0, \qquad F_A = \rho_0 V g.$$

Показание динамометра равно $F_{\text{упр}}$:

$$P = \rho V g - \rho_0 V g = (\rho - \rho_0)\, g V.$$



Силы, действующие на кристалл: сила тяжести вниз, сила пружины и выталкивающая сила вверх

2. Плотность раствора. Растворились две трети кристалла — масса соли $\frac{2}{3}\rho V$ ушла в воду. Масса раствора и его объём (объёмы складываются по условию):

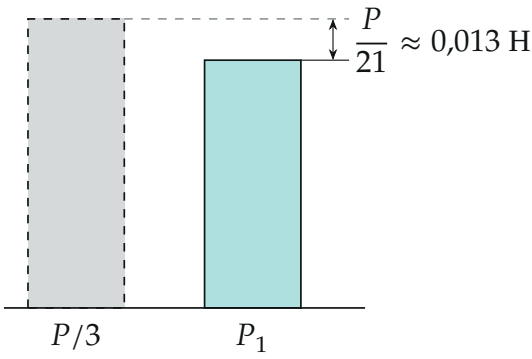
$$m_1 = 4\rho_0 V + \frac{2}{3}\rho V, \qquad V_1 = 4V + \frac{2}{3}V = \frac{14}{3}V.$$

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{12\rho_0 + 2\rho}{14} = \rho_0 + \frac{1}{7}(\rho - \rho_0).$$

Раствор плотнее воды на седьмую часть разности $\rho - \rho_0$. Считаем, что соль распределилась по пробирке равномерно.

3. Вес остатка в растворе. Тот же первый закон Ньютона для кристалла объёма $V/3$ в жидкости плотности ρ_1:

$$P_1 = (\rho - \rho_1)\, g\, \frac{V}{3} = \left(\rho - \rho_0 - \frac{1}{7}(\rho - \rho_0)\right) \frac{gV}{3} = \frac{6}{7} \cdot \frac{(\rho - \rho_0) g V}{3} = \frac{2}{7} P.$$



Вес остатка (бирюза) и наивный ответ $P/3$ (пунктир) в масштабе: разница $P/21$

4. Сравнение с $P/3$.

$$\frac{P}{3} - P_1 = \frac{P}{3} - \frac{2P}{7} = \frac{P}{21} = \frac{0{,}27}{21}\ \text{Н} \approx 0{,}013\ \text{Н}.$$

Вес остатка меньше $P/3$ на $P/21 \approx 0{,}013$ Н и равен $P_1 = \frac{2}{7}P \approx 0{,}077$ Н.

Обратите внимание: ответ не зависит от плотности соли ρ — в P и P_1 входит одна и та же разность $\rho - \rho_0$. Поэтому плотность соли условие и не даёт.

Ответ.

$$P_1 = \frac{2}{7}P \approx 0{,}077\ \text{Н} < \frac{P}{3}; \qquad \frac{P}{3} - P_1 = \frac{P}{21} \approx 0{,}013\ \text{Н}.$$

Проверка. Размерность: $P/21$ — в ньютонах. Знак: раствор плотнее воды, выталкивающая сила больше — вес меньше, совпадает. Числен-

но для поваренной соли ($\rho = 2{,}16$ г/см^3): из $P = 0{,}27$ Н объём $V = \frac{P}{(\rho-\rho_0)g} \approx 23{,}8$ см^3, $\rho_1 \approx 1{,}166$ г/см^3, $P_1 = (\rho-\rho_1)g\frac{V}{3} \approx 0{,}0771$ Н $= \frac{2}{7}P$. Предел: если бы воды было очень много (nV при $n \to \infty$), $\rho_1 \to \rho_0$ и $P_1 \to P/3$ — плотность раствора почти не меняется.

Ответ. Отличается: вес остатка меньше $P/3$ на $\dfrac{P}{21} \approx 0{,}013$ Н (он равен $\dfrac{2}{7}P \approx 0{,}077$ Н).