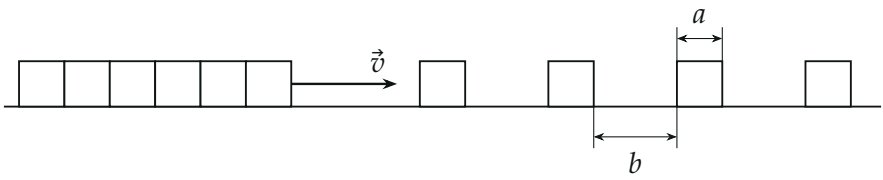
Цепочка кубиков

Задача 1. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 9 класс, задача 1] Очень много одинаковых кубиков с размером ребра a расположили вдоль одной прямой на горизонтальной поверхности. Расстояние между ближайшими гранями соседних кубиков равно b. Грани кубиков параллельны. Самый левый кубик начали двигать с постоянной скоростью v в направлении остальных кубиков, вовлекая их в движение с той же скоростью v (см. рисунок). Найти среднюю (за достаточно большое время) скорость возрастания длины цепочки из вовлечённых в движение кубиков. В каких пределах может меняться эта скорость в зависимости от времени, за которое она вычисляется? Считать, что время столкновения кубиков очень мало.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равномерное движение и среднюю скорость. Цепочка растёт скачками: пока движущаяся группа проходит промежуток b, длина цепочки не меняется, а в момент удара она мгновенно увеличивается на a. Значит, длина цепочки — «лесенка» во времени, а средняя скорость её роста — наклон прямой, вокруг которой идёт лесенка. Удар мгновенный, и после него все вовлечённые кубики едут со скоростью v (по условию), поэтому промежутки внутри цепочки равны нулю.

Обозначения. t — время от начала движения первого кубика; $N(t)$ — число кубиков, присоединившихся к первому за время t; $L(t)$ — длина цепочки (сумма рёбер вовлечённых кубиков); $\Delta L = L(t) - L(0)$ — прирост длины; $u = \Delta L/t$ — средняя скорость роста за время t.

1. Сколько кубиков вовлечено за время t. Передний край цепочки движется равномерно со скоростью v. До ближайшего неподвижного кубика ему каждый раз нужно пройти ровно b: после удара новый кубик

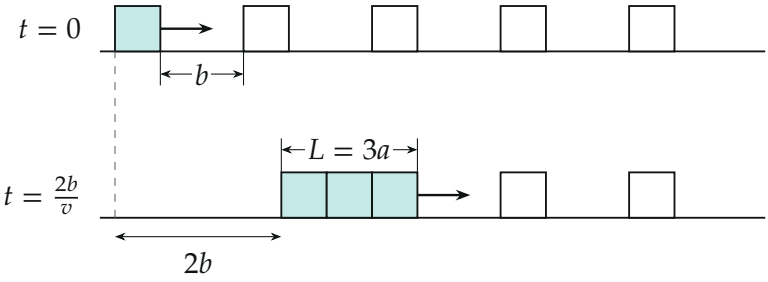
сразу едет вместе с цепочкой, а следующий стоит на расстоянии b от него. Время между ударами

$$\tau = \frac{b}{v}.$$

За время t передний край прошёл vt, то есть произошло

$$N = \left[\frac{vt}{b}\right]$$

ударов ([…] — целая часть).



Через время $2b/v$ первый кубик сдвинулся на $2b$, к нему присоединились два кубика, цепочка (бирюза) — длины $3a$

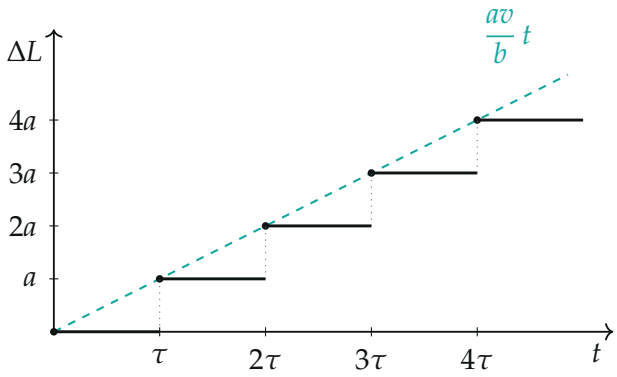
2. Длина цепочки. В цепочке первый кубик и N присоединившихся, промежутков между ними нет:

$$L(t) = a\,(N+1), \qquad \Delta L = L(t) - L(0) = aN = a\left[\frac{vt}{b}\right].$$

3. Средняя скорость за большое время. При $t \gg b/v$ число vt/b велико, и отбрасывание дробной части (меньше единицы) почти ничего не меняет: $\Delta L \approx avt/b$. Средняя скорость роста

$$u = \frac{\Delta L}{t} \approx \frac{av}{b}.$$

На графике это наклон прямой $\Delta L = \dfrac{av}{b}\,t$, под которой идёт лесенка.



Прирост длины цепочки — лесенка с шагом a по высоте и $\tau = b/v$ по времени; средний наклон av/b

4. Пределы для средней скорости за время t. Для целой части справедливо

$$\frac{vt}{b} - 1 < N \leqslant \frac{vt}{b}.$$

Умножим на a/t:

$$\frac{av}{b} - \frac{a}{t} < u \leqslant \frac{av}{b}.$$

Верхняя граница достигается в моменты ударов $t = kb/v$ (лесенка касается прямой), к нижней скорость приближается перед самым ударом. Ширина интервала a/t убывает со временем, поэтому за большое время $u \to av/b$.

Обратите внимание: ответ на второй вопрос зависит от того, что считать «длиной цепочки». Мы делим на t прирост длины. Если же делить на t всю длину вместе с первым кубиком, $L/t = a(N+1)/t$, интервал сдвигается вверх на a/t: $\frac{av}{b} < L/t \leqslant \frac{av}{b} + \frac{a}{t}$. У организаторов в ответе именно такой интервал (с полной длиной); первый ответ av/b при большом t от этого не зависит.

Ответ.

$$u = \frac{av}{b}; \qquad \frac{av}{b} - \frac{a}{t} < u \leqslant \frac{av}{b}.$$

Проверка. Размерность: $[av/b] = \text{м} \cdot \frac{\text{м/с}}{\text{м}} = \text{м/с}$. Предел $b \to 0$ (кубики стоят вплотную): $u \to \infty$ — вся цепочка сразу приходит в движение, импульс передаётся мгновенно. Если $b = a$, цепочка растёт со скоростью v:

за время a/v передний край проходит a и прибавляется кубик длины a. Численная проверка ($a = 1$, $b = 2$, $v = 1$, t от 0,1 до 1000) даёт u всегда в найденном интервале и $u(999) = 0{,}4995 \approx av/b = 0{,}5$.

Ответ. $u = \dfrac{av}{b}$; за время t средняя скорость роста лежит в пределах $\dfrac{av}{b} - \dfrac{a}{t} < u \leqslant \dfrac{av}{b}$ (если делить на t полную длину цепочки с первым кубиком — $\dfrac{av}{b} < \dfrac{L}{t} \leqslant \dfrac{av}{b} + \dfrac{a}{t}$).