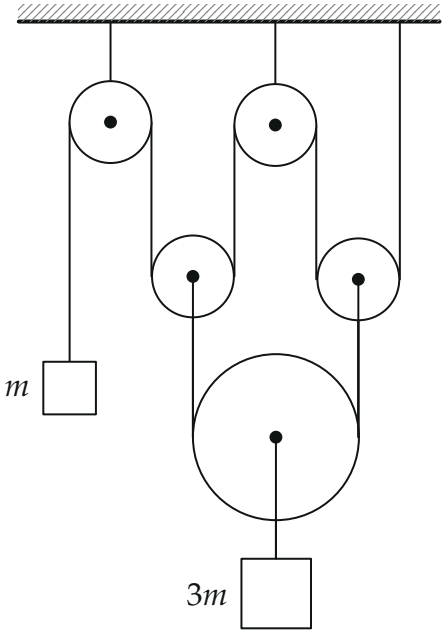
Грузы m и $3m$ на блоках

Задача 4. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 9 класс, задача 4] «Грузы m и $3m$ на системе блоков».

В системе, изображённой на рисунке, все блоки невесомы, нити — невесомы и нерастяжимы. Массы грузов равны m и $3m$. Найти ускорения грузов.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача класса «блоки: натяжения + связь перемещений». Блоки невесомы, поэтому силы на каждом из них уравновешены даже при ускоренном движении — отсюда связь натяжений. Нити нерастяжимы — отсюда связь перемещений, а значит, и ускорений. Дальше второй закон Ньютона для двух грузов. Качественно: система блоков даёт выигрыш в силе в 4 раза, $4mg > 3mg$, поэтому лёгкий груз перетянет — m пойдёт вниз, $3m$ вверх.

Обозначения. Нить 1 — от груза m через верхний левый блок, под малым подвижным блоком S_1, через верхний правый блок, под малым

блоком S_2 к потолку; её натяжение T. Нить 2 — от оси S_1 под большим блоком к оси S_2, натяжение T'. Нить 3 — от оси большого блока к грузу $3m$, натяжение T_2. Ускорение a_1 груза m берём положительным вниз, a_2 груза $3m$ — вверх.

1. Натяжения. Нить 1 невесома и скользит по невесомым блокам, поэтому её натяжение одинаково по всей длине: T. Блок массы ноль: по второму закону Ньютона $0 \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}$, сумма сил на него равна нулю. Для малого блока S_1: вверх тянут два отрезка нити 1, вниз — нить 2:

$$T' = 2T.$$

(Для S_2 — то же самое.) Для большого блока: вверх тянут два отрезка нити 2, вниз — нить 3:

$$T_2 = 2T' = 4T.$$

Все натяжения подписаны на рис. 1.

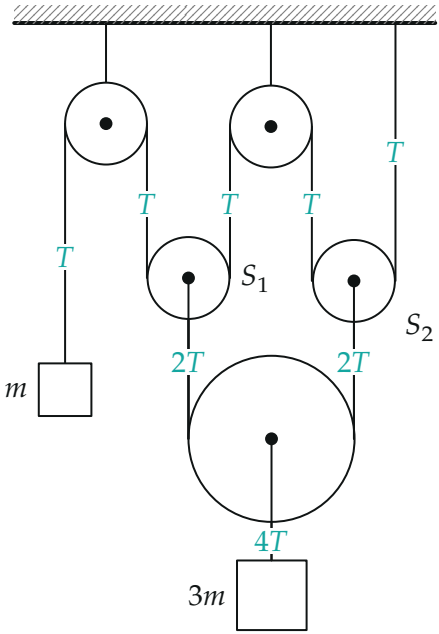


Рис. 1. Натяжения отрезков нитей. Каждый невесомый блок уравновешен: S_1 и S_2 — $2T$ вверх и $2T$ вниз, большой блок — $2T + 2T$ вверх и $4T$ вниз.

2. Связь перемещений. Пусть груз m опустился на x, малые блоки поднялись на y_1 и y_2, большой блок (и груз $3m$) — на y. Нить 1 нерастяжима: удлинение свисающего к m отрезка x берётся из четырёх отрезков, огибающих S_1 и S_2; подъём каждого малого блока на y_i укорачивает два отрезка:

$$x = 2y_1 + 2y_2.$$

Нить 2 нерастяжима: два её вертикальных отрезка от осей S_1, S_2 до большого блока сохраняют суммарную длину, поэтому

$$(y_1 - y) + (y_2 - y) = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x}{4}.$$

Каждый малый блок по отдельности может двигаться как угодно (они невесомы), но их сумма — нет. Перемещения пропорциональны в любой момент, значит, так же связаны скорости и ускорения:

$$a_2 = \frac{a_1}{4}.$$

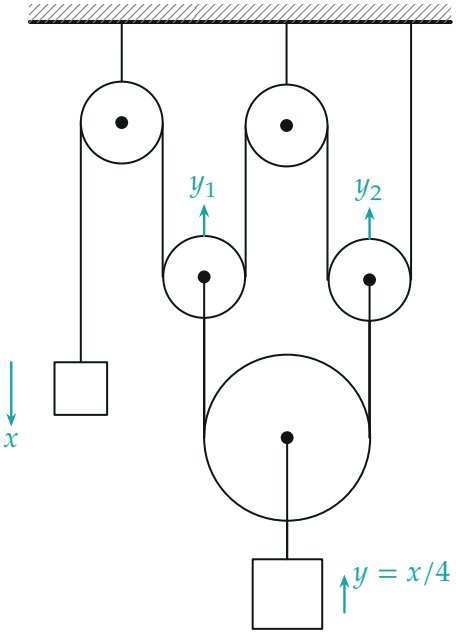


Рис. 2. Перемещения: груз m вниз на x, малые блоки вверх на y_1 и y_2 ($2y_1 + 2y_2 = x$), большой блок с грузом $3m$ вверх на среднее $y = (y_1 + y_2)/2 = x/4$.

3. Второй закон Ньютона для грузов (рис. 3). Груз m, ось вниз; груз $3m$, ось вверх — в направлении предполагаемого движения:

$$ma_1 = mg - T, \qquad 3ma_2 = 4T - 3mg.$$

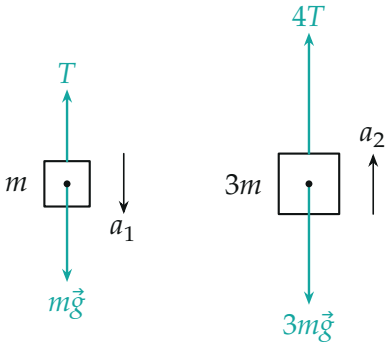


Рис. 3. Силы на грузы. Длины стрелок — по найденным $T = \frac{15}{19}mg$ и $4T = \frac{60}{19}mg$.

4. Решение системы. Подставим $a_2 = a_1/4$ во второе уравнение и выразим T:

$$4T = 3mg + \frac{3ma_1}{4} \;\Rightarrow\; T = \frac{3mg}{4} + \frac{3ma_1}{16}.$$

В первое уравнение:

$$ma_1 = mg - \frac{3mg}{4} - \frac{3ma_1}{16} \;\Rightarrow\; \frac{19}{16}a_1 = \frac{g}{4} \;\Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{4g}{19}, \qquad a_2 = \frac{a_1}{4} = \frac{g}{19}.$$

Оба ускорения положительны: груз m действительно идёт вниз, груз $3m$ — вверх. Натяжение $T = m(g - a_1) = \frac{15}{19}mg$.

Второй способ — энергия. Пусть m опустился на x, тогда $3m$ поднялся на $x/4$. Работа сил тяжести $mgx - 3mg\dfrac{x}{4} = \dfrac{mgx}{4}$, кинетическая энергия $\dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{3m}{2}\left(\dfrac{v}{4}\right)^2 = \dfrac{19}{16}\cdot\dfrac{mv^2}{2}$. Система движется как одно тело массы $\dfrac{19}{16}m$ под силой $\dfrac{mg}{4}$: $a_1 = \dfrac{mg/4}{19m/16} = \dfrac{4g}{19}$ — совпало. Натяжения при этом не понадобились: невесомые блоки и нерастяжимые нити работы не совершают.

Обратите внимание: ускорение малого груза вчетверо *больше*, чем большого, а натяжение нити у большого груза вчетверо больше, чем у малого. Именно поэтому в «эффективную массу» груз $3m$ входит с множителем $1/16$, а не $1/4$.

Проверка. Размерность: $[a] = [g]$. Предельный случай: если бы второй груз был $4m$, система была бы в равновесии — по формуле $a_1 = \dfrac{(m - M/4)g}{m + M/16}$ при $M = 4m$ получаем 0; при $M = 3m$ — $\dfrac{g/4}{19/16} = \dfrac{4g}{19}$. Груз m: $m\cdot\dfrac{4g}{19} = mg - \dfrac{15}{19}mg$ — верно.

Смысл: выигрыш в силе в 4 раза оборачивается проигрышем в перемещении в 4 раза; лёгкий груз «перетягивает» тяжёлый, но медленно.

Ответ. Груз m движется вниз с ускорением $a_1 = \dfrac{4g}{19}$, груз $3m$ — вверх с ускорением $a_2 = \dfrac{g}{19}$.