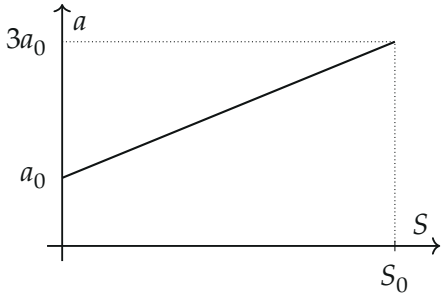
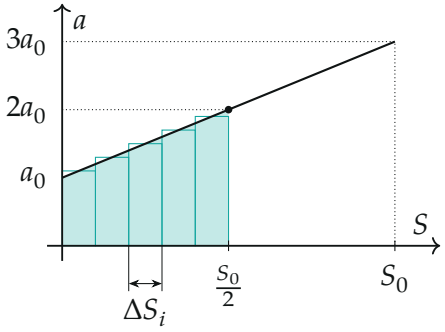
Скорость по графику $a(S)$

Задача 5. [Росатом 2024/25, заключительный этап, 9 класс, задача 5] Тело движется в положительном направлении оси OX с переменным ускорением. На рисунке представлен график зависимости проекции ускорения тела на ось OX от пройденного им пути (величины a_0 и S_0 известны). Найти мгновенную скорость тела в тот момент времени, когда оно пройдёт расстояние $S_0/2$ с начала движения. Начальная скорость тела v_0 известна.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на неравномерное движение с ускорением, заданным как функция пути, а не времени. Формулы равноускоренного движения $v = v_0 + at$ здесь не работают. Работает другая: для равноускоренного движения в одну сторону $v_к^2 - v_н^2 = 2a\,\Delta S$. Разобьём путь на малые участки, на каждом ускорение почти постоянно, и сложим. Справа получится площадь под графиком $a(S)$.

Обозначения. S — пройденный путь; $a(S)$ — проекция ускорения на ось OX; v_1 — искомая скорость при $S = S_0/2$; ΔS_i, a_i — длина i-го малого участка и ускорение на нём.



Площадь под графиком от 0 до $S_0/2$ (бирюза) — трапеция; узкие столбики — малые участки, на которых ускорение почти постоянно

1. Ускорение на середине пути. График — прямая от a_0 при $S = 0$ до $3a_0$ при $S = S_0$:

$$a(S) = a_0 + \frac{2a_0}{S_0}\,S, \qquad a\left(\frac{S_0}{2}\right) = a_0 + a_0 = 2a_0.$$

2. Малый участок. Ускорение положительно, скорость направлена вдоль OX и только растёт, поэтому тело не разворачивается и путь равен перемещению. На малом участке ΔS_i ускорение почти постоянно и равно a_i. Для равноускоренного движения

$$v_i^2 - v_{i-1}^2 = 2a_i\,\Delta S_i,$$

где v_{i-1} и v_i — скорости в начале и в конце участка. Эта формула получается исключением времени из $v = v_\text{н} + at$ и $S = v_\text{н}t + at^2/2$.

3. Сумма по всем участкам. Конечная скорость каждого участка — начальная для следующего, поэтому при сложении всех равенств промежуточные квадраты скоростей сокращаются:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2\,(a_1\Delta S_1 + a_2\Delta S_2 + \dots) = 2\Pi,$$

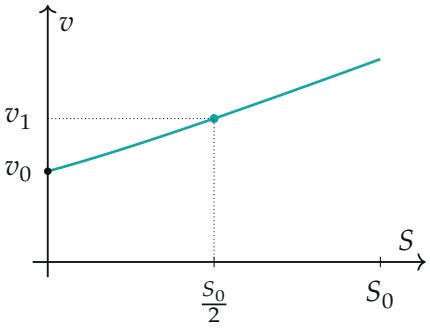
где Π — площадь под графиком $a(S)$ от 0 до $S_0/2$ (сумма площадей узких столбиков).

4. Площадь трапеции. Фигура под графиком — трапеция с основаниями a_0 и $2a_0$ и высотой $S_0/2$:

$$\Pi = \frac{a_0 + 2a_0}{2}\cdot\frac{S_0}{2} = \frac{3}{4}\,a_0S_0.$$

Тогда

$$v_1^2 = v_0^2 + 2\Pi = v_0^2 + \frac{3}{2}\,a_0S_0, \qquad v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{3}{2}\,a_0S_0}.$$



Скорость от пути $v(S) = \sqrt{v_0^2 + 2a_0S + 2a_0S^2/S_0}$ *(построено для* $v_0^2 = a_0S_0$*, тогда* $v_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}\,v_0 \approx 1{,}58\,v_0$*)*

Обратите внимание: площадь под графиком $a(S)$ — это не изменение скорости (так было бы для графика $a(t)$), а половина изменения квадрата скорости.

Ответ.

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{3}{2}\,a_0S_0}.$$

Проверка. Размерность: $[a_0S_0] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$, как у v_0^2. Второй способ — теорема о кинетической энергии: работа силы $ma(S)$ на пути $S_0/2$ равна $m\Pi$, она идёт на прирост $mv^2/2$, получаем то же. Предел: если бы ускорение было постоянным a_0, вышло бы $v_0^2 + a_0S_0$; здесь ускорение на первой половине пути в среднем $1{,}5a_0$ — и прирост квадрата скорости в полтора раза больше. Численное интегрирование $\frac{d(v^2)}{dS} = 2a(S)$ шагом $10^{-5}S_0$ даёт $v_1^2 - v_0^2 = 1{,}5000\,a_0S_0$.

Ответ. $v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{3}{2}\,a_0S_0}$.