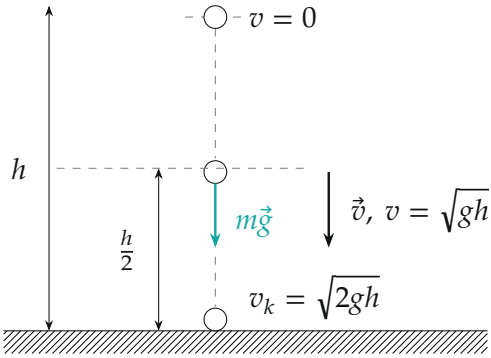
Мощность силы тяжести при падении

Задача 2. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 10 класс, задача 2] «Мощность силы тяжести при падении».

Тело падает на землю с некоторой высоты с нулевой начальной скоростью. Во сколько раз отличаются средняя мощность силы тяжести за все время падения и мгновенная мощность, развиваемая силой тяжести над телом, когда оно пройдёт половину расстояния до поверхности земли?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Сила тяжести mg постоянна, а скорость тела растёт, поэтому мощность $P = mgv$ растёт вместе со скоростью. Средняя мощность — это работа, делённая на время; мгновенная — сила, умноженная на скорость в данный момент. Идея в том, что при равноускоренном падении скорость пропорциональна времени, а не пути: на середине *пути* тело ещё не прошло середину *времени*, и это решает, какая из двух мощностей больше.

Обозначения. h — высота падения, m — масса, t — время всего падения, v_k — скорость в конце, τ — момент, когда пройдена половина высоты. Сопротивление воздуха не учитываем, начальная скорость равна нулю.



Поясняющий рисунок: начало падения, середина пути и конец. На середине пути скорость $\sqrt{gh}$ (по энергии), в конце — $\sqrt{2gh}$; $m\vec{g}$ постоянна

1. Время и конечная скорость. Падение равноускоренное с ускорением g и нулевой начальной скоростью: $h = \dfrac{gt^2}{2}$, $v_k = gt$. Отсюда

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \qquad v_k = \sqrt{2gh}.$$

2. Средняя мощность. Это работа силы тяжести за всё падение, делённая на время. Сила постоянна, смещение h направлено вдоль силы, поэтому $A = mgh$:

$$P_{\text{ср}} = \frac{A}{t} = \frac{mgh}{\sqrt{2h/g}} = mg\sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

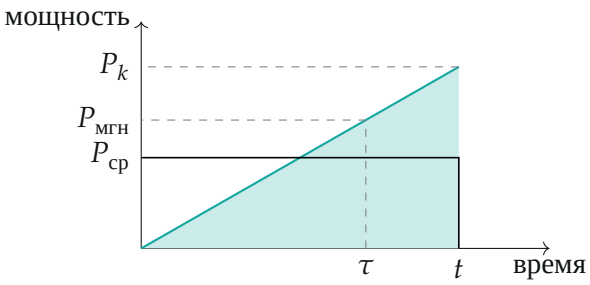
Второй способ: мощность $P = mgv$ растёт со временем линейно ($v = gt$), поэтому её среднее по времени — полусумма начального и конечного значений: $P_{\text{ср}} = \dfrac{0 + mgv_k}{2} = \dfrac{mg\sqrt{2gh}}{2} = mg\sqrt{\dfrac{gh}{2}}$. Совпало.

3. Мгновенная мощность на половине высоты. Скорость в этой точке найдём из закона сохранения механической энергии для тела между началом и точкой на высоте $\frac{h}{2}$ над землёй (сопротивления нет, потенциальная энергия переходит в кинетическую):

$$mg\,\frac{h}{2} = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gh}.$$

Мощность силы тяжести — сила на скорость, они направлены одинаково: $P_{\text{мгн}} = mgv = mg\sqrt{gh}$.

Обратите внимание. «Середина пути» и «середина времени» — разные моменты: при равноускоренном движении путь растёт как t^2, поэтому половина пути проходится за $\tau = t/\sqrt{2} \approx 0{,}71\,t$, больше половины всего времени. Если взять мгновенную мощность на середине времени, она совпала бы со средней: $P(t/2) = mg\,v_k/2 = P_{\text{ср}}$.

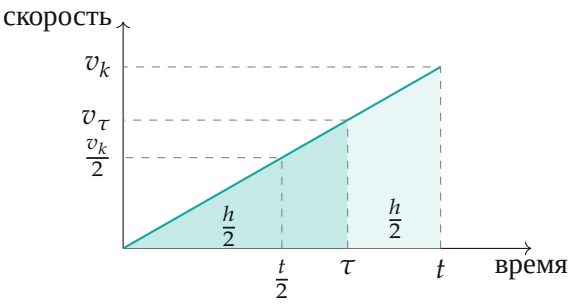


Мощность $P = mgv$ растёт со временем линейно. Работа $A = mgh$ — площадь треугольника; прямоугольник высотой $P_{ср}$ и шириной t имеет ту же площадь

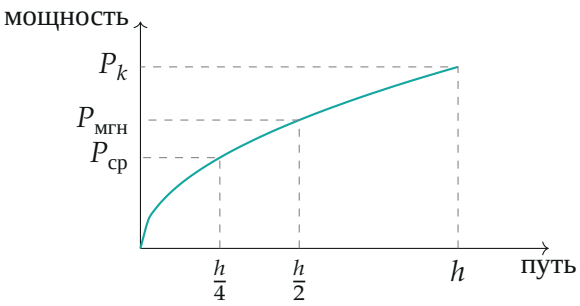
4. Отношение.

$$\frac{P_{\text{ср}}}{P_{\text{мгн}}} = \frac{mg\sqrt{gh/2}}{mg\sqrt{gh}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71.$$

Средняя мощность за всё время падения меньше мгновенной на половине высоты в $\sqrt{2}$ раза. Знак физически понятен: на середине пути скорость $v_\tau = v_k/\sqrt{2}$ уже больше средней $v_k/2$, ведь больше половины времени тело ещё впереди (график скорости ниже: $\tau = t/\sqrt{2} > t/2$).



Скорость $v = gt$: площадь под графиком — пройденный путь. Заштрихованный треугольник (до момента τ) и оставшаяся трапеция — по $\frac{h}{2}$ каждая, поэтому $\tau > \frac{t}{2}$: ровно столько времени уходит на первую половину пути. $v_\tau = \sqrt{gh}$, $v_k = \sqrt{2gh}$



Мощность как функция пройденного пути: $P = mg\sqrt{2gs} \propto \sqrt{s}$. Значение $P_{ср} = P_k/2$ достигается на пути $\frac{h}{4}$, а $P_{мгн} = P_k/\sqrt{2}$ — на $\frac{h}{2}$

Проверка. Размерность: $mg\sqrt{gh}$ — Н · м/с = Вт, верно. Числа: $h = 20$ м, $g = 10$ м/с^2: $t = 2$ с, $v_k = 20$ м/с, $v_\tau = \sqrt{200} \approx 14{,}1$ м/с, средняя скорость 10 м/с, отношение $10/14{,}1 \approx 0{,}71$.

Ответ. $\dfrac{P_{ср}}{P_{мгн}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$: средняя мощность меньше мгновенной в $\sqrt{2}$ раза.