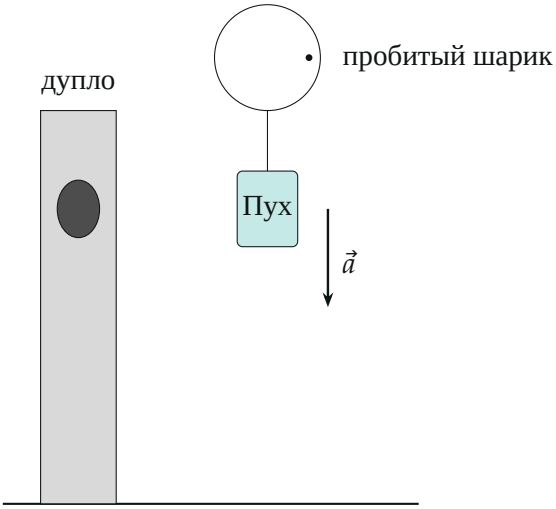
Винни-Пух и пробитый шарик

Задача 3. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 10 класс, задача 3] «Винни-Пух и пробитый шарик».

Винни-Пух решил подняться на воздушном шарике за мёдом. В тот момент, когда Пух завис на шарике около дупла с пчёлами и уже приготовился доставать мёд, Пятачок выстрелил по пчёлам и пробил воздушный шарик. В результате Винни-Пух начал спускаться с ускорением, которое линейно возрастало с течением времени — от $g/2$ в начальный момент времени до g в момент падения Пуха на землю (g — ускорение свободного падения). С какой скоростью упал Винни-Пух на землю, если он падал в течение $\Delta t = 2$ с? $g = 10$ м/с^2.



Поясняющий рисунок: Винни-Пух висит у дупла, шарик пробит; Пух начинает спускаться с ускорением $\vec{a}$, направленным вниз

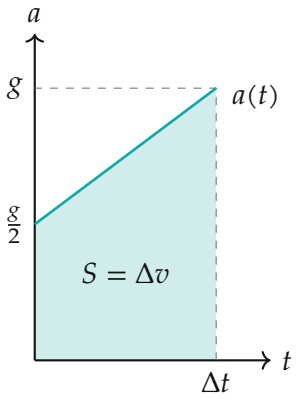
▲ **Решение.** **Что происходит.** Ускорение Пуха меняется со временем, поэтому формулы равноускоренного движения здесь не годятся. Но за малый промежуток dt ускорение почти постоянно, и скорость меняется на $dv = a\,dt$. Это площадь узкой полоски под графиком $a(t)$, а полное

изменение скорости — площадь под графиком от начала падения до удара. Начальная скорость нулевая (Пух завис), поэтому эта площадь и есть искомая скорость.

Обозначения. t — время от прокола шарика; $a(t)$ — ускорение Пуха, направленное вниз; v — скорость при ударе о землю. Ось направим вниз: тогда a и скорость положительны.

1. Закон изменения ускорения. Ускорение линейно растёт от $a(0) = g/2$ до $a(\Delta t) = g$:

$$a(t) = \frac{g}{2} + \frac{g - g/2}{\Delta t}\, t = \frac{g}{2} + \frac{g\, t}{2\,\Delta t}.$$



Ускорение линейно растёт от $g/2$ до g; площадь под графиком — изменение скорости

2. Изменение скорости — площадь. Для малого промежутка dt скорость меняется на $dv = a\,dt$. Сложим изменения за все промежутки от 0 до Δt:

$$v - 0 = \sum a\,dt = S,$$

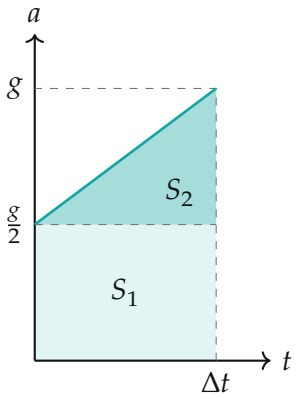
где S — площадь фигуры под графиком $a(t)$. Начальная скорость равна нулю (Пух в начале завис), поэтому v равна этой площади.

3. Площадь. Фигура — трапеция с основаниями $g/2$ и g и высотой Δt:

$$v = \frac{g/2 + g}{2}\,\Delta t = \frac{3}{4}\,g\,\Delta t.$$

Второй способ — разрезать на прямоугольник S_1 (высота $g/2$) и треугольник S_2 (катеты Δt и $g/2$):

$$v = S_1 + S_2 = \frac{g}{2}\,\Delta t + \frac{1}{2}\cdot\frac{g}{2}\,\Delta t = \frac{3}{4}\,g\,\Delta t.$$



Трапеция как сумма прямоугольника $S_1 = g\Delta t/2$ и треугольника $S_2 = g\Delta t/4$

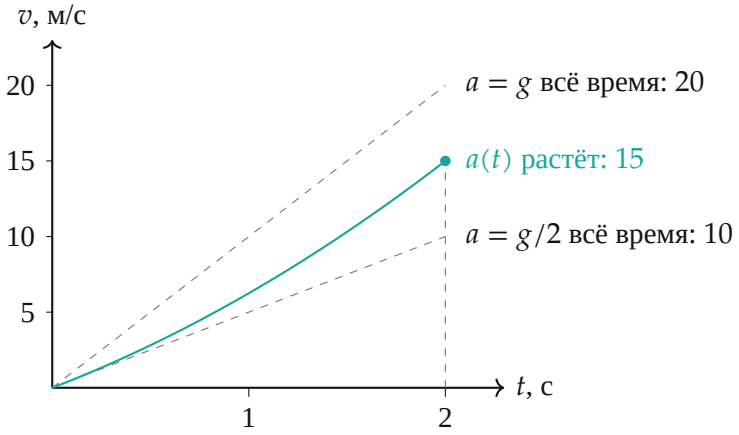
Число: $v = \dfrac{3}{4}\cdot 10\ \text{м/с}^2 \cdot 2\ \text{с} = 15\ \text{м/с}$.

Обратите внимание: нельзя взять $v = a\,\Delta t$ ни с конечным ускорением ($g\Delta t = 20$ м/с), ни с начальным ($g\Delta t/2 = 10$ м/с): ускорение меняется, и верный ответ лежит между ними. Для линейного роста годится среднее по времени ускорение $(g/2 + g)/2 = 3g/4$.

Проверка: закон скорости. Умножим $a(t)$ на dt и просуммируем от 0 до t — получим скорость в любой момент:

$$v(t) = \frac{g}{2}\,t + \frac{g\,t^2}{4\,\Delta t} = 5t + 1{,}25\,t^2\ \ (\text{м/с})\,.$$

При $t = \Delta t = 2$ с получаем $5\cdot 2 + 1{,}25\cdot 4 = 15$ м/с — то же значение. Размерность: $g\Delta t$ — м/с. Скорость лежит между 10 и 20 м/с — значениями при постоянных ускорениях $g/2$ и g:



Скорость при постоянных ускорениях $g/2$ и g (пунктир) и при линейно растущем ускорении (бирюзовая парабола): к моменту Δt — 15 м/с

Смысл: ускорение росло от $g/2$ до g, и скорость при ударе — среднее арифметическое скоростей 10 и 20 м/с, потому что ускорение изменялось линейно.

Ответ. $v = \dfrac{3}{4}\, g\, \Delta t = 15$ м/с.