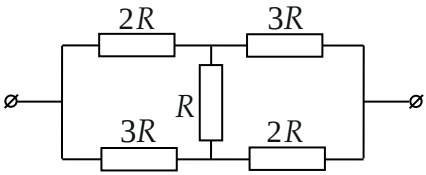
Цепь из резисторов R, 2R, 3R

Задача 4. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 10 класс, задача 4] «Цепь из резисторов R, $2R$, $3R$».

К электрической цепи, схема которой приведена на рисунке, приложили напряжение U. Найти силу электрического тока, текущего через резистор с сопротивлением R. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая в цепи, если средний резистор перегорит? Сопротивления резисторов известны.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это мостовая схема: из точки A в точку B ведут два пути — через $2R$ и $3R$ сверху и через $3R$ и $2R$ снизу, а резистор R соединяет их средние точки. Мост не уравновешен ($2:3 \neq 3:2$), поэтому через R ток идёт. Простые правила параллельного и последовательного соединения здесь не работают, поэтому расставим потенциалы узлов и запишем правило узлов (закон сохранения заряда в узле). После перегорания R схема станет простой — два параллельных пути.

Обозначения. Узлы: A — левая точка подключения, B — правая, C — верхний узел и D — нижний узел у резистора R. Потенциал B принимаем за нуль (заземляем), тогда $\varphi_A = U$. Неизвестны потенциалы φ_C и φ_D. Ток через резистор R направим от C к D и найдём его знак. Закон Ома для участка: ток через резистор равен разности потенциалов на его концах, делённой на сопротивление.

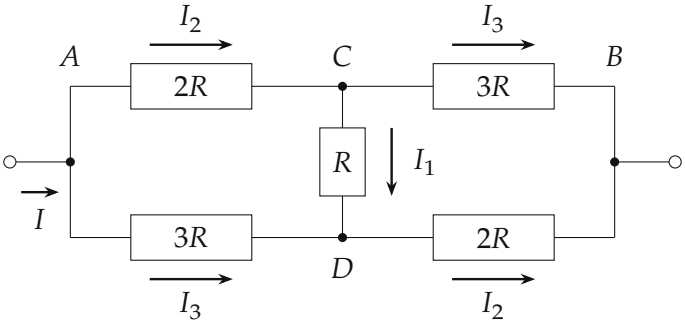


Схема с узлами A, B, C, D и токами. I_1 — через R (от C к D), I_2 — через $2R$ (оба резистора $2R$), I_3 — через $3R$, I — общий ток. Стрелки токов идут от A к B

1. Правило узлов для C. В узел C ток входит по резистору $2R$ из A и выходит через $3R$ к B и через R вниз к D. По закону Ома через каждый резистор течёт ток «разность потенциалов делить на сопротивление»:

$$\frac{U-\varphi_C}{2R}=\frac{\varphi_C-0}{3R}+\frac{\varphi_C-\varphi_D}{R}.$$

2. Правило узлов для D. Ток входит в D по резистору $3R$ из A и по R сверху из C, выходит через $2R$ к B:

$$\frac{U-\varphi_D}{3R}+\frac{\varphi_C-\varphi_D}{R}=\frac{\varphi_D-0}{2R}.$$

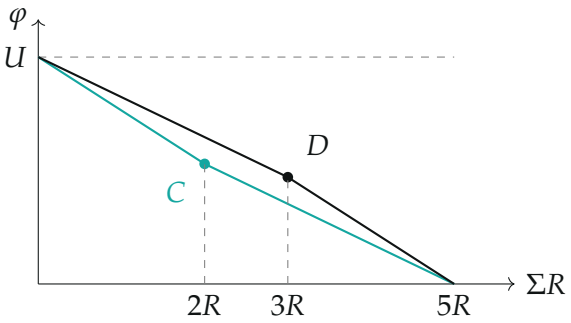
3. Решаем. Умножим оба уравнения на $6R$, чтобы убрать дроби:

$$3U=11\varphi_C-6\varphi_D,$$
$$2U=-6\varphi_C+11\varphi_D.$$

Из первого $\varphi_D=\dfrac{11\varphi_C-3U}{6}$; подставим во второе: $12U=-36\varphi_C+121\varphi_C-33U$, откуда $85\varphi_C=45U$:

$$\varphi_C=\frac{9}{17}\,U,\qquad \varphi_D=\frac{11\cdot 9-3\cdot 17}{6\cdot 17}\,U=\frac{8}{17}\,U.$$

Потенциал C выше, чем D, значит, ток через R действительно идёт от C к D.



Потенциал вдоль двух путей от A к B: по $A \to C \to B$ (бирюзовый) и по $A \to D \to B$ (чёрный); по горизонтали — сумма сопротивлений от A. Наклон участка пропорционален току в нём. Узлы C и D имеют разные потенциалы ($\frac{9}{17}U$ и $\frac{8}{17}U$), поэтому через R течёт ток

4. Сила тока через R.

$$I_1 = \frac{\varphi_C - \varphi_D}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{9}{17} - \frac{8}{17}\right)U = \frac{U}{17R}.$$

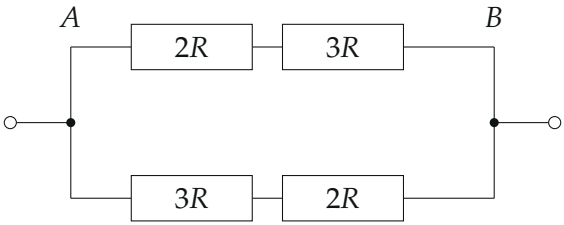
5. Второй способ — токи по ветвям. Схема переходит сама в себя, если поменять местами выводы A и B и перевернуть её на 180°: каждый резистор встаёт на место такого же. Поэтому токи через оба резистора $2R$ одинаковы (I_2), через оба $3R$ — тоже (I_3). Правило узлов для C: $I_2 = I_3 + I_1$. Напряжение между A и D можно набрать двумя путями: через $2R$ и R или напрямую через $3R$:

$$2R\,I_2 + R\,I_1 = 3R\,I_3.$$

Подставим $I_2 = I_3 + I_1$: $2I_3 + 2I_1 + I_1 = 3I_3$, откуда $I_3 = 3I_1$, $I_2 = 4I_1$. Напряжение U набирается по пути $A \to C \to B$: $U = 2R\,I_2 + 3R\,I_3 = 8RI_1 + 9RI_1 = 17RI_1$, то есть $I_1 = \dfrac{U}{17R}$. То же самое; заодно $\varphi_A - \varphi_C = 2RI_2 = \frac{8}{17}U$ — совпало с первым способом.

6. Мощность в цепи. Источник даёт общий ток $I = I_2 + I_3 = 7I_1 = \dfrac{7U}{17R}$, и мощность по формуле $P = UI$:

$$P_1 = UI = \frac{7U^2}{17R}, \qquad R_{\text{общ}} = \frac{U}{I} = \frac{17}{7}R.$$



Средний резистор перегорел: остались два пути $2R + 3R = 5R$ каждый, включённых параллельно

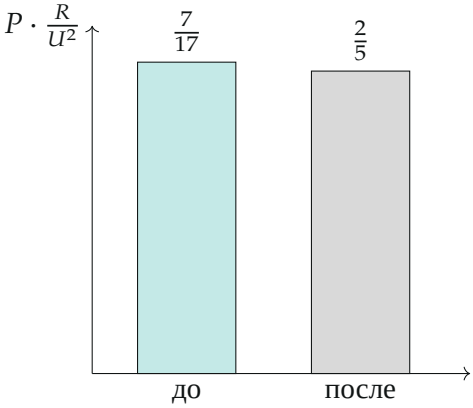
7. После перегорания среднего резистора. Ветвь с R разорвана, остаются два пути $2R + 3R = 5R$ и $3R + 2R = 5R$, включённые параллельно между A и B. Сопротивление цепи и мощность при том же напряжении U:

$$R'_{\text{общ}} = \frac{5R \cdot 5R}{5R + 5R} = \frac{5}{2}R, \qquad P_2 = \frac{U^2}{R'_{\text{общ}}} = \frac{2U^2}{5R}.$$

Отношение мощностей

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{7}{17} \cdot \frac{5}{2} = \frac{35}{34} \approx 1{,}03.$$

Мощность *уменьшится* в $\frac{35}{34}$ раза, то есть составит $\frac{34}{35}$ от прежней (на $\approx 3\,\%$).



Мощность в единицах U^2/R до и после перегорания: $\frac{7}{17} \approx 0{,}412$ и $\frac{2}{5} = 0{,}400$. Разница небольшая, потому что через средний резистор идёт лишь $\frac{1}{17}$ напряжения на цепи

Обратите внимание. При заданном напряжении мощность $U^2/R_{\text{общ}}$ растёт, когда сопротивление цепи падает. Перегорание резистора удаляет один из параллельных путей, поэтому сопротивление цепи вырастает ($\frac{17}{7}R = 2{,}43R \to 2{,}5R$), а мощность падает. Если бы получилось «больше», это был бы признак ошибки.

Проверка. Размерность: U/R — ампер, U^2/R — ватт. Пределы по среднему резистору: если соединить C и D перемычкой (сопротивление 0), то $R_{\text{общ}} = (2R \parallel 3R) + (3R \parallel 2R) = \frac{6}{5}R + \frac{6}{5}R = 2{,}4R$; если его убрать, $R_{\text{общ}} = 2{,}5R$. Наш результат с R в мосту, $\frac{17}{7}R \approx 2{,}43R$, лежит между ними, как и должно быть. Малое $I_1 = \frac{U}{17R}$ согласуется с близостью $\varphi_C \approx 0{,}53\,U$ и $\varphi_D \approx 0{,}47\,U$ и с тем, что $\frac{35}{34}$ близко к единице.

Ответ. $I_1 = \dfrac{U}{17R}$ (от верхнего узла к нижнему); мощность уменьшится в $\dfrac{35}{34}$ раза.