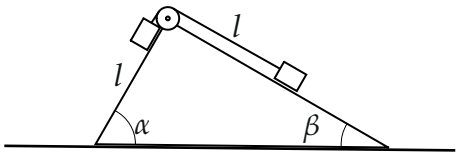
Грузы на нити через блок на клине

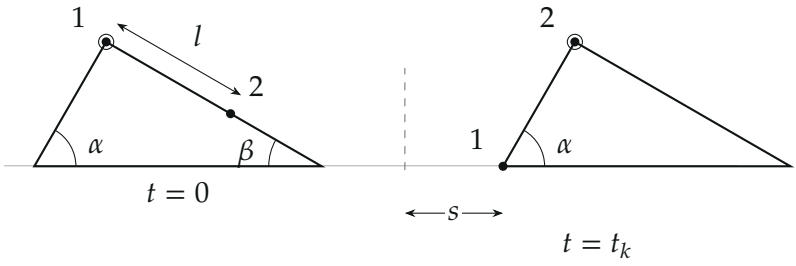
Задача 5. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 10 класс, задача 5] «Грузы на нити через блок на клине».

На гладкой горизонтальной поверхности стоит треугольный невесомый клин, грани которого наклонены под углами $\alpha = 60°$ и $\beta = 30°$ к поверхности. На ребре клина укреплён невесомый блок. Через блок переброшена невесомая и нерастяжимая нить, концы которой привязаны к двум одинаковым телам. Длина нити равна длине меньшей стороны клина l (см. рисунок). Сначала клин и тела удерживают в таком положении, а в некоторый момент времени отпускают. Через какое время левый груз достигнет горизонтальной поверхности? Трение между всеми телами отсутствует, размеры тел малы.



▲ **Решение. Что происходит.** Левое тело съезжает по крутой грани и тянет нить, правое поднимается по пологой. Горизонтальных внешних сил нет, поэтому клин не стоит на месте — невесомый не значит неподвижный: импульса и энергии у него нет, а скорость есть. Главная идея — законы сохранения горизонтального импульса и энергии; время получится из того, что в системе отсчёта клина тела движутся равноускоренно.

Обозначения. Тело 1 — левое, тело 2 — правое, масса каждого m; ось x вправо; u — скорость клина. Блок закреплён на клине, нить нерастяжима, поэтому относительно клина оба тела движутся вдоль граней с одинаковой по модулю скоростью v (тело 1 вниз по левой грани, тело 2 вверх по правой — оба влево); s — путь каждого тела относительно клина, в конце $s = l$.



Начало и момент, когда тело 1 доехало до поверхности (тела — точки): тело 2 в начале на расстоянии l от блока, в конце у блока; клин сместился вправо на $s_{кл}$

1. Горизонтальный импульс. Внешние силы на систему «клин + два тела» (тяжести и реакция опоры) вертикальны, поверхность гладкая, поэтому проекция импульса на x сохраняется и равна нулю. Клин невесом, его импульс нулевой, остаются два тела. Горизонтальные проекции их скоростей относительно земли — скорость клина плюс скорость относительно клина (у обоих влево): $u - v\cos\alpha$ и $u - v\cos\beta$. Значит,

$$m\,(u - v\cos\alpha) + m\,(u - v\cos\beta) = 0,$$

откуда

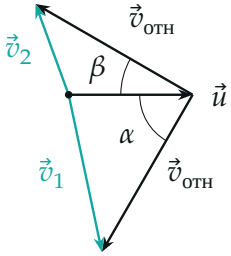
$$u = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}\,v = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\,v.$$

2. Скорости относительно земли. Скорость тела относительно земли — сумма скорости клина $\vec{u}$ и скорости относительно клина $\vec{v}_{\text{отн}}$. По теореме косинусов для векторов (угол между $\vec{u}$ и $\vec{v}_{\text{отн}}$ равен $180^\circ - \alpha$ у тела 1 и $180^\circ - \beta$ у тела 2):

$$v_1^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\alpha, \qquad v_2^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\beta.$$

Сложим: $v_1^2 + v_2^2 = 2u^2 + 2v^2 - 2uv(\cos\alpha + \cos\beta)$, а из пункта 1 $\cos\alpha + \cos\beta = 2u/v$, поэтому

$$v_1^2 + v_2^2 = 2\,(v^2 - u^2).$$



Сложение скоростей (в масштабе): $\vec{u}$ — скорость клина, $\vec{v}_{отн}$ — скорости тел относительно клина (по граням, длиной v), бирюзовые $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ — скорости относительно земли

3. Энергия. Трения нет, нить и блок невесомы, клин невесом (его энергия нулевая) — механическая энергия тел сохраняется. Когда каждое тело проехало относительно клина путь s, тело 1 опустилось на $s\sin\alpha$, а тело 2 поднялось на $s\sin\beta$:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = mgs\,(\sin\alpha - \sin\beta).$$

Подставим $v_1^2 + v_2^2 = 2(v^2 - u^2)$ и $u^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{8}\,v^2$:

$$m\,(v^2 - u^2) = mgs\,\frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad \Rightarrow \quad v^2\,\frac{6-\sqrt{3}}{8} = gs\,\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

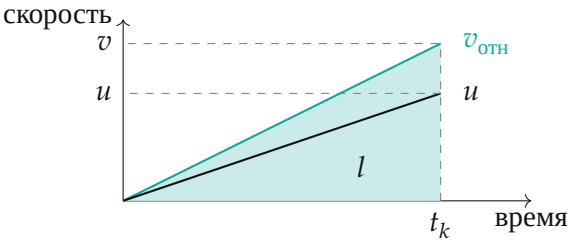
$$v^2 = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{6-\sqrt{3}}\,g\,s.$$

4. Равноускоренное движение. Соотношение $v^2 = Ks$ с постоянным $K = \dfrac{4(\sqrt{3}-1)}{6-\sqrt{3}}\,g$ верно при любом пути s (мы нигде не использовали $s = l$), и $v = 0$ при $s = 0$. Это формула равноускоренного движения без начальной скорости $v^2 = 2a_{отн}s$ с ускорением $a_{отн} = K/2 \approx 0{,}34\,g$. Путь

l относительно клина проходится за время

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_{\text{отн}}}} = \sqrt{\frac{(6-\sqrt{3})\,l}{(\sqrt{3}-1)\,g}} = \sqrt{\frac{(3+5\sqrt{3})\,l}{2g}} \approx 2{,}41\sqrt{\frac{l}{g}},$$

так как $\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{(6-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{2} = \dfrac{3+5\sqrt{3}}{2}$. Обратите внимание: l — путь *относительно клина*; путь тела 1 относительно земли другой.



Скорость тела относительно клина $v_{отн} = a_{отн}t$ растёт линейно, площадь под графиком — путь l, откуда $t_k = 2l/v$; скорость клина $u = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\,v_{отн}$ в каждый момент

5. Второй способ — центр масс и динамика. Горизонтальная координата центра масс тел не меняется (внешних горизонтальных сил нет, клин невесом). Тела смещаются относительно клина влево на $l\cos\alpha$ и $l\cos\beta$, клин — вправо на $s_{\text{кл}}$:

$$(s_{\text{кл}} - l\cos\alpha) + (s_{\text{кл}} - l\cos\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{\text{кл}} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\,l \approx 0{,}68\,l,$$

тот же коэффициент $\frac{1+\sqrt{3}}{4} = u/v$, что в пункте 1.

Теперь по законам Ньютона в системе отсчёта клина (она едет с ускорением w вправо, поэтому на тела действует сила инерции mw влево), вдоль граней и перпендикулярно им:

$$ma_{\text{отн}} = mg\sin\alpha - T + mw\cos\alpha, \quad N_1 = m\,(g\cos\alpha - w\sin\alpha),$$
$$ma_{\text{отн}} = T - mg\sin\beta + mw\cos\beta, \quad N_2 = m\,(g\cos\beta + w\sin\beta).$$

Клин невесом, поэтому сумма горизонтальных сил на него (реакции тел и натяжения нити на блок) равна нулю:

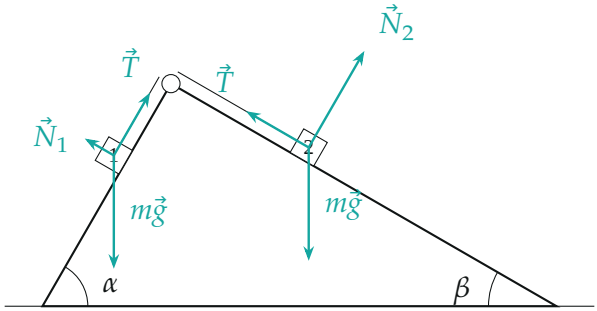
$$N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\beta + T(\cos\beta - \cos\alpha) = 0.$$

Решение системы:

$$a_{\text{отн}} = \frac{2(5\sqrt{3}-3)}{33}\,g \approx 0{,}343\,g, \quad w = \frac{g}{6-\sqrt{3}} \approx 0{,}234\,g,$$

$$T \approx 0{,}64\,mg, \quad N_1 \approx 0{,}30\,mg, \quad N_2 \approx 0{,}98\,mg.$$

Все силы положительны: нить натянута, тела не отрываются от граней; $a_{\text{отн}}$ то же, что в пункте 4 ($\frac{2(\sqrt{3}-1)}{6-\sqrt{3}} = \frac{2(5\sqrt{3}-3)}{33}$).



Силы на тела (длины стрелок по модулю: $N_2 > T > N_1$): $\vec{T}$ — по нити к блоку, $\vec{N}$ — по нормали к граням, тяжесть — вниз

Проверка. Размерность: $\sqrt{l/g}$ — секунды, верно. Независимо, по уравнениям динамики пункта 5: $t = \sqrt{2l/a_{\text{отн}}} = 2{,}4146\sqrt{l/g}$, и $\sqrt{(3+5\sqrt{3})/2} = 2{,}4146$ — совпало.

Ответ. $t = \sqrt{\dfrac{(3+5\sqrt{3})\,l}{2g}} \approx 2{,}41\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.