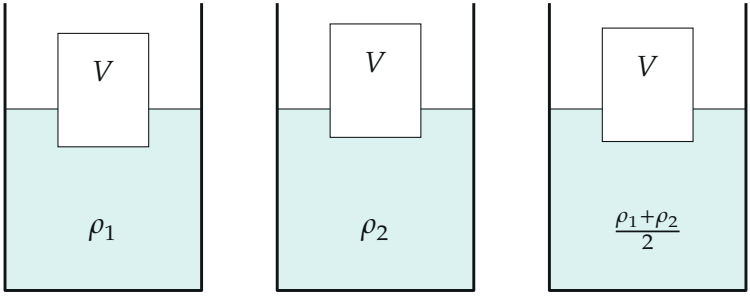
Тело в жидкостях и среднее арифметическое плотностей

Задача 1. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 10 класс, задача 1] «Тело в жидкостях и среднее арифметическое плотностей».

Плавая в одной жидкости, тело погружается в неё на n-ую часть своего объёма ($n = 1/3$). Плавая в другой жидкости, то же тело погружается на k-ую часть своего объёма ($k = 1/4$). На какую часть своего объёма погрузится то же тело в жидкость, плотность которой равна среднему арифметическому значению плотностей первой и второй жидкости?



Поясняющий рисунок: одно и то же тело в трёх жидкостях; доли погружения n и k даны, долю r нужно найти

▲ **Решение.** **Что происходит.** Масса и объём тела во всех трёх опытах одни и те же, а плавающее тело покоится: сила Архимеда равна силе тяжести. Сила Архимеда пропорциональна произведению плотности жидкости на погружённый объём, поэтому *плотность жидкости, умноженная на долю погружения, одинакова во всех трёх жидкостях*: чем плотнее жидкость, тем меньше доля. Выразим плотности двух жидкостей через доли n и k, возьмём их полусумму и найдём долю для неё.

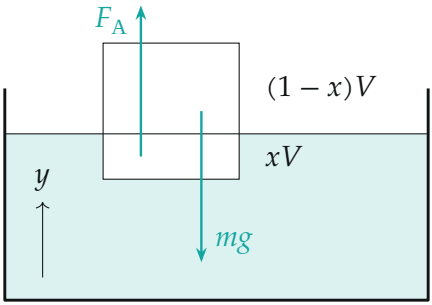
Обозначения. m, V — масса и объём тела; ρ_1, ρ_2 — плотности первой и второй жидкостей; $\rho_3 = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ — плотность третьей; x — доля погружения в произвольной жидкости (в первой $x = n$, во второй $x = k$, в третьей $x = r$); $\rho_ж$ — плотность этой жидкости.

1. Условие плавания. Тело покоится, на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила Архимеда $\vec{F}_{\text{A}}$. Второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось y, направленную вверх (так обе силы входят без косинусов):

$$F_{\text{A}} - mg = 0.$$

Сила Архимеда — вес жидкости в погружённом объёме xV: $F_{\text{A}} = \rho_{\text{ж}} g\, xV$. Тогда

$$\rho_{\text{ж}}\, xV = m. \tag{1}$$



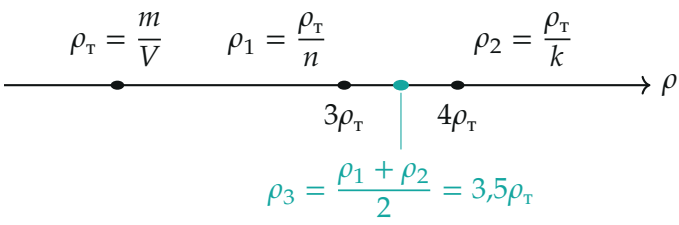
Плавающее тело: $F_A = mg$ (стрелки равны по длине); сила Архимеда приложена к центру погружённой части

2. Плотности первых двух жидкостей. Применим (1) к первой ($x = n$) и второй ($x = k$) жидкостям:

$$\rho_1 = \frac{m}{nV}, \qquad \rho_2 = \frac{m}{kV}.$$

3. Плотность третьей жидкости. Среднее арифметическое двух чисел — их полусумма:

$$\rho_3 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{m}{2V}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right) = \frac{m}{V} \cdot \frac{n+k}{2nk}.$$



Плотности на одной оси (в единицах плотности тела $\rho_m = m/V$): ρ_3 — середина отрезка между ρ_1 и ρ_2

4. Доля погружения в третью жидкость. Применим (1) к третьей жидкости ($x = r$):

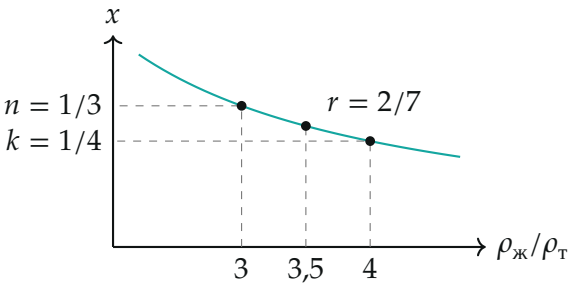
$$r = \frac{m}{\rho_3 V} = \frac{2nk}{n+k}.$$

Подставим $n = \frac{1}{3}$, $k = \frac{1}{4}$:

$$r = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{7}.$$

Второй способ — через плотность тела $\rho_т = m/V$: $\rho_1 = 3\rho_т$, $\rho_2 = 4\rho_т$, $\rho_3 = 3{,}5\rho_т$, тогда $r = \dfrac{\rho_т}{\rho_3} = \dfrac{1}{3{,}5} = \dfrac{2}{7}$.

Обратите внимание: доля r — не среднее арифметическое долей $\dfrac{n+k}{2} = \dfrac{7}{24}$. Усредняли *плотности*, а доля обратно пропорциональна плотности, поэтому r есть среднее гармоническое n и k.



Доля погружения $x = \rho_m/\rho_ж$ — гипербола; точки: n, r и k

Проверка. Доли безразмерны, и ответ безразмерен. Предел: при $n = k$ обе жидкости одинаковы, и $r = \dfrac{2n^2}{2n} = n$. Знак: третья жидкость плотнее первой, но легче второй, значит $k < r < n$: $\frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3}$. Тело плавает, потому что все доли меньше единицы (жидкости плотнее тела).

Смысл: погружение определяется обратной величиной плотности жидкости, поэтому усреднение плотностей даёт гармоническое, а не арифметическое среднее долей.

Ответ. $r = \dfrac{2nk}{n+k} = \dfrac{2}{7}$ объёма тела.