Три резистора и два амперметра

Задача 2. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 10 класс, задача 2] «Три резистора и два амперметра».

В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, два из трёх резисторов одинаковы, третий отличается от них. Известно, что показания первого амперметра $I_1 = I$, второго $I_2 = 2I/3$. Известно сопротивление первого резистора $r_1 = r$. Найти сопротивления второго и третьего резисторов. Считать, что сопротивления амперметров равны нулю.

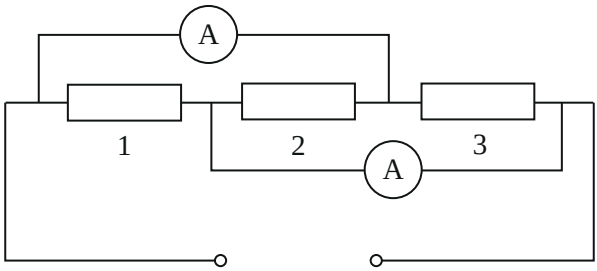


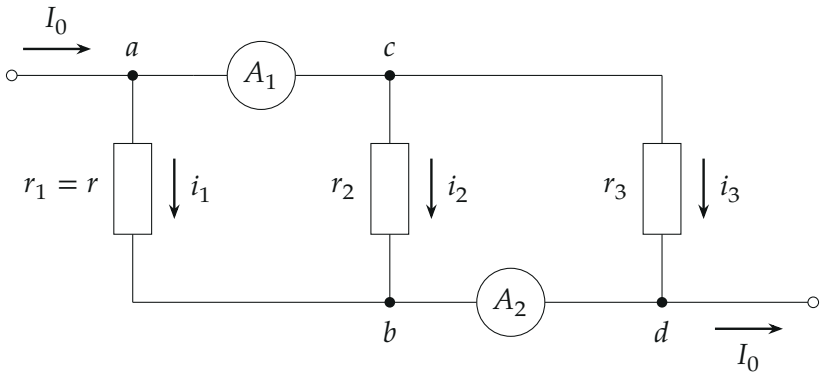
Рисунок условия: резисторы 1, 2, 3 — слева направо, первый амперметр — верхний, второй — нижний

▲ **Решение. Что происходит.** Сопротивление амперметров равно нулю, поэтому каждый из них — просто провод: на нём нет падения напряжения. Заменив амперметры проводами, объединяем узлы, и цепь упрощается — все три резистора оказываются включены параллельно одному и тому же напряжению. Амперметры при этом измеряют суммы токов отдельных ветвей. Из двух уравнений на токи и данного условия «два из трёх одинаковы» получим сопротивления; вариантов, какие именно два одинаковы, несколько — переберём их.

Обозначения. i_1, i_2, i_3 — токи через резисторы 1, 2, 3; U — общее напряжение на резисторах; I_0 — ток источника. Первым считаем верхний амперметр A_1, вторым — нижний A_2 (так их пронумеровано на рисунке).

1. Эквивалентная схема. Обозначим узлы: a — левый конец цепи, b — между резисторами 1 и 2, c — между 2 и 3, d — правый конец.

Амперметр A_1 соединяет узлы a и c, а A_2 — узлы b и d. Провод без сопротивления делает потенциалы концов равными: $\varphi_a = \varphi_c$, $\varphi_b = \varphi_d$. Резистор 1 стоит между a и b, резистор 2 — между c и b, резистор 3 — между c и d: каждый включён между точками с потенциалами $\varphi_a = \varphi_c$ и $\varphi_b = \varphi_d$. Значит, резисторы параллельны и на каждом одно напряжение U.



Эквивалентная схема (стрелки токов — без масштаба): A_1 и A_2 — перемычки между узлами a и c, b и d; резисторы включены параллельно

2. Что показывают амперметры. Ток I_1 через A_1 — единственный путь от узла a к узлу c, откуда питаются резисторы 2 и 3. Закон сохранения заряда для узла c: сколько тока втекло через амперметр, столько вытекло через резисторы 2 и 3. Через A_2 идут токи резисторов 1 и 2, собравшиеся в узле b, к узлу d. Получаем

$$i_2 + i_3 = I_1 = I, \qquad i_1 + i_2 = I_2 = \frac{2}{3} I.$$

Вычтем второе уравнение из первого:

$$i_3 - i_1 = \frac{1}{3} I > 0.$$

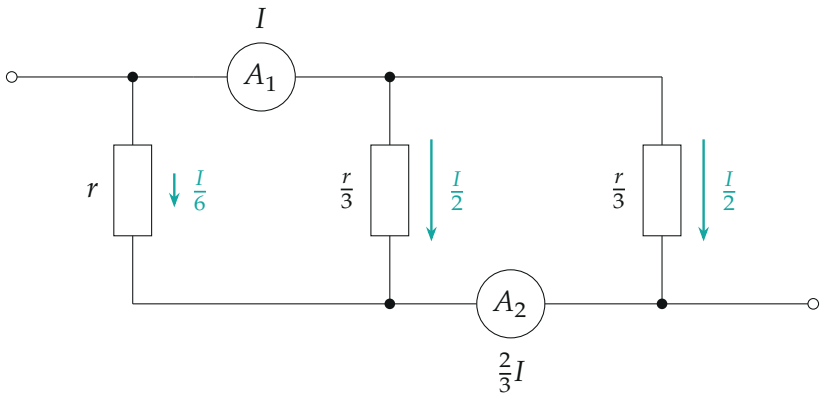
Закон Ома для каждого резистора при одном U: $i_k = U/r_k$. Так как $i_3 > i_1$, сопротивление $r_3 < r_1 = r$: третий резистор не равен первому.

3. Какие два резистора одинаковы. Возможны три варианта пары: $r_1 = r_3$, $r_2 = r_3$, $r_1 = r_2$. Первый невозможен: при $r_1 = r_3$ токи $i_1 = i_3$, а по найденному $i_3 - i_1 = \frac{1}{3}I \neq 0$ (показания амперметров в этом случае были бы одинаковыми). Остаются два варианта.

Обратите внимание: условие не говорит, какие именно два резистора совпадают, и оба оставшихся варианта совместимы с данными. Поэтому у задачи два решения.

4. Вариант $r_2 = r_3$ (резистор 1 отличается). Равные сопротивления при одном U дают равные токи: $i_2 = i_3$. Из $i_2 + i_3 = I$ находим $i_2 = i_3 = I/2$, затем $i_1 = \frac{2}{3}I - I/2 = I/6$. Напряжение найдём по первому резистору: $U = i_1 r = Ir/6$. Тогда

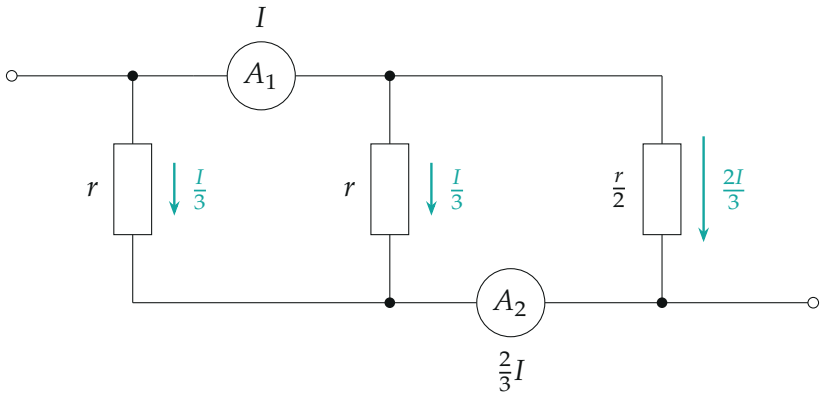
$$r_2 = r_3 = \frac{U}{i_2} = \frac{Ir/6}{I/2} = \frac{r}{3}.$$



Вариант 1: $r_2 = r_3 = r/3$. Токи резисторов (стрелки в масштабе): $I/6$, $I/2$, $I/2$; показания амперметров I и $2I/3$

5. Вариант $r_1 = r_2$ (резистор 3 отличается). Тогда $i_1 = i_2$; из $i_1 + i_2 = \frac{2}{3}I$ получаем $i_1 = i_2 = I/3$, а из $i_2 + i_3 = I$ — $i_3 = \frac{2}{3}I$. Напряжение: $U = i_1 r = Ir/3$. Сопротивления:

$$r_2 = r_1 = r, \qquad r_3 = \frac{U}{i_3} = \frac{Ir/3}{2I/3} = \frac{r}{2}.$$



Вариант 2: $r_2 = r$, $r_3 = r/2$. Токи резисторов (стрелки в масштабе): $I/3$, $I/3$, $2I/3$; показания амперметров I и $2I/3$

Проверка. Размерность: сопротивления получены как отношение r на безразмерные числа. Оба набора сверены подстановкой в исходные уравнения: вариант 1 (число: пусть $r = 6$ Ом, $I = 6$ А, тогда $r_2 = r_3 = 2$ Ом, $U = 6$ В, токи 1, 3, 3 А; A_1 показывает $3 + 3 = 6$ А, A_2 — $1 + 3 = 4 = \frac{2}{3} \cdot 6$ А); вариант 2 ($r = 6$ Ом, $I = 3$ А: $r_2 = 6$ Ом, $r_3 = 3$ Ом, $U = 6$ В, токи 1, 1, 2 А; A_1: $1 + 2 = 3$ А, A_2: $1 + 1 = 2 = \frac{2}{3} \cdot 3$ А). Схему целиком посчитали и численно (узловые потенциалы с идеальными амперметрами): отношение $I_2/I_1 = \frac{2}{3}$ в обоих случаях, а при $r_1 = r_3$ оно равно 1.

Смысл: показания двух амперметров дают две суммы токов, а «два резистора одинаковы» — недостающую связь между ними; поскольку не сказано, какие именно, ответов два.

Ответ. Два решения: 1) $r_2 = r_3 = \dfrac{r}{3}$; 2) $r_2 = r$, $r_3 = \dfrac{r}{2}$.