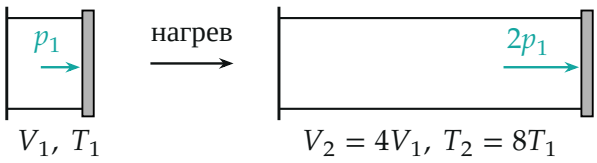
Процесс с квадратичной связью объёма и давления

Задача 3. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 10 класс, задача 3] «Процесс с квадратичной связью объёма и давления».

С неизменным количеством идеального газа проходит процесс, в котором объём газа пропорционален квадрату его давления. Как изменился объём газа при увеличении его абсолютной температуры в 8 раз? Газ остаётся идеальным в течение всего процесса.

▲ **Решение. Что происходит.** Давление растёт вместе с объёмом, причём объём пропорционален квадрату давления. Температура входит только через уравнение состояния $pV = \nu RT$. Идея — не вводить константы процесса: выразить второе состояние через первое множителем и составить отношение уравнений состояния.

Обозначения. Состояние 1 — до нагревания (p_1, V_1, T_1), состояние 2 — после (p_2, V_2, $T_2 = 8T_1$). $k = V_2/V_1$ — искомый множитель объёма. Количество газа ν постоянно.



Газ под поршнем: объём — длина, давление — длина стрелки. При нагревании в 8 раз объём вырос в 4 раза, давление — в 2

1. Закон процесса через два состояния. Объём пропорционален квадрату давления, поэтому отношение объёмов равно квадрату отношения давлений. Положим $V_2 = kV_1$; давление положительно, значит

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = \sqrt{k}.$$

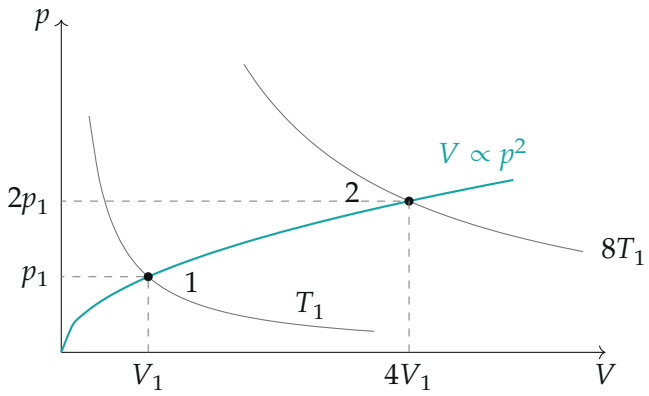


Диаграмма p–V: бирюзовая кривая — процесс ($p \propto \sqrt{V}$), серые — изотермы T_1 и $8T_1$ ($pV = \text{const}$). Состояние 2 лежит на изотерме, где pV в 8 раз больше

2. Уравнение состояния в двух состояниях. Для каждого состояния $pV = \nu RT$ с одним и тем же ν. Разделим уравнение состояния 2 на уравнение состояния 1: ν и R сократятся, и останутся только безразмерные множители:

$$\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 8.$$

Подставим $p_2/p_1 = \sqrt{k}$ и $V_2/V_1 = k$:

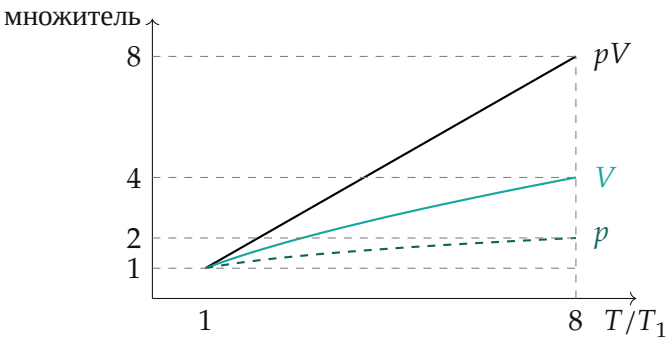
$$\sqrt{k} \cdot k = k^{3/2} = 8 \quad \Rightarrow \quad k = 8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^2 = 4.$$

Давление при этом выросло в $\sqrt{k} = 2$ раза; проверим: $p_2 V_2/(p_1 V_1) = 2 \cdot 4 = 8$.

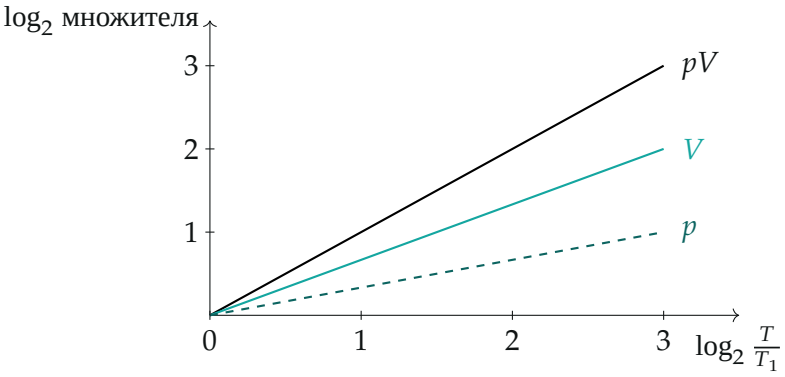
3. Второй способ — выразить объём через температуру. Запишем закон процесса как $p = \alpha\sqrt{V}$ с постоянным α и подставим в уравнение состояния $pV = \nu RT$:

$$\alpha V^{3/2} = \nu RT \quad \Rightarrow \quad V = \left(\frac{\nu R}{\alpha} T\right)^{2/3} \propto T^{2/3}.$$

Если T вырастает в 8 раз, то V вырастает в $8^{2/3} = 4$ раза — тот же результат без множителя k.



Величины в долях начальных значений: $pV \propto T$ (чёрная), $V \propto T^{2/3}$ (бирюзовая), $p \propto T^{1/3}$ (пунктир). При $T = 8T_1$ они в 8, 4 и 2 раза больше



Те же зависимости в двойном логарифмическом масштабе (основание 2): степенные законы — прямые с наклоном, равным показателю. При $T = 8T_1$ (шаг 3) V поднимается на 2, p — на 1, pV — на 3

Обратите внимание. Связь «объём пропорционален квадрату давления» не изотерма и не изобара: в изотерме $V \propto 1/p$, в изобаре p постоянно. Поэтому T растёт быстрее, чем V ($8 > 4$): растёт ещё и давление.

Проверка. Общий случай $V \propto p^n$ даёт $V \propto T^{n/(n+1)}$: при $n = 0$ получаем $V = \text{const}$ (изохора), при $n \to \infty$ — $V \propto T$ (изобара); наш случай $n = 2$ даёт показатель $\frac{2}{3}$, а $k = 4$ лежит между изохорным ($k = 1$) и изобарным ($k = 8$).

Ответ. Объём увеличился в $8^{2/3} = 4$ раза (давление — в 2 раза).