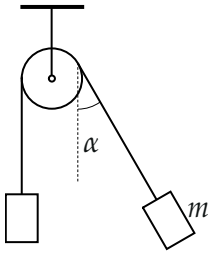
Два груза на нити через блок

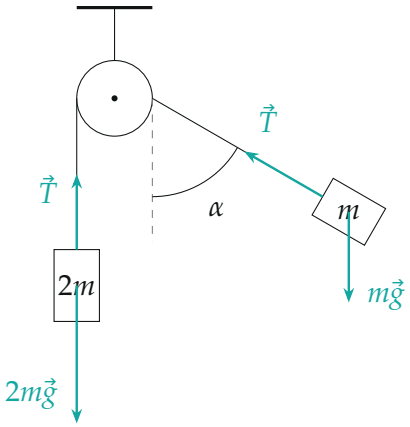
Задача 4. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 10 класс, задача 4] «Два груза на нити через блок».

Два тела с массами $2m$ и m привязали к концам невесомой и нерастяжимой нити, которую перебросили через невесомый блок. Удерживая тела так, что нить натянута, тело с массой m отклонили на угол α от вертикали (см. рисунок). Затем тела отпускают. Найти ускорения тел сразу после этого.



▲ **Решение. Что происходит.** В момент отпускания скорости нулевые. Нить нерастяжима, поэтому тела связаны только в направлении нити: насколько удлиняется отрезок нити у одного тела, настолько укорачивается у другого. Поперёк нити тело m ничем не удерживается: сила натяжения направлена вдоль нити и поперёк неё не действует. Идея — разложить движение тела m на две независимые части: вдоль нити (связь с телом $2m$) и поперёк (свободное падение составляющей тяжести). Это обычный маятник, только на конце нити, которая ещё и вытягивается.

Обозначения. a — модуль ускорения тела $2m$ (оно движется по вертикали вниз, предположим — проверим по знаку). Для тела m: $a_{\parallel}$ — проекция ускорения на направление нити, $a_{\perp}$ — на перпендикуляр к нити. T — натяжение; блок и нить невесомы, поэтому T одинаково по всей длине нити. Тяжесть mg тела m раскладывается по нити на $mg\cos\alpha$ (от блока) и поперёк на $mg\sin\alpha$.



Силы в момент отпускания (рисунок для $\alpha = 60°$, длины стрелок по модулю: $T = mg$). На тело $2m$ — T вверх и $2mg$ вниз; на тело m — T точно по нити к блоку и mg вертикально вниз

1. Связь ускорений. За малое время dt из состояния покоя тело m смещается вдоль своего ускорения. Часть смещения вдоль нити Δl меняет длину отрезка нити с телом m; часть поперёк нити идёт по дуге вокруг блока и длину нити не меняет (в первом порядке малости). Длина нити постоянна, поэтому Δl равно смещению тела $2m$ вниз. Дважды продифференцировав, получаем равенство ускорений: ускорение тела m вдоль нити равно a и направлено *к блоку* (отрезок с телом m укорачивается, а тяжёлое тело $2m$ уходит вниз).

Обратите внимание: равенство верно только в момент отпускания, пока скорости нулевые. Позже у тела m появилось бы ещё центростремительное ускорение v^2/ℓ вдоль нити.

2. Тело $2m$. Второй закон Ньютона в проекции на вертикаль вниз:

$$2m\,a = 2mg - T.$$

3. Тело m вдоль нити. Ось направим к блоку; ускорение вдоль неё равно a. Сила T направлена вдоль оси, тяжесть даёт проекцию $-mg\cos\alpha$ (она тянет от блока):

$$m\,a = T - mg\cos\alpha.$$

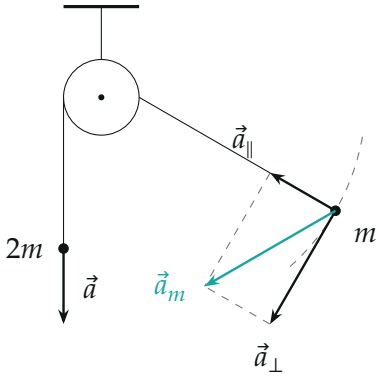
4. Тело m поперёк нити. Сила T поперёк нити проекции не имеет, остаётся составляющая тяжести $mg\sin\alpha$, направленная в сторону вертикали:

$$m a_\perp = mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a_\perp = g\sin\alpha.$$

5. Решаем. Неизвестных a и T, уравнений два (п. 2 и 3). Сложим их, и T сократится:

$$3m\,a = 2mg - mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g\,(2-\cos\alpha)}{3}.$$

Это ускорение тела $2m$. Заодно $T = 2mg - 2ma = \dfrac{2}{3}\,mg\,(1+\cos\alpha) > 0$: нить натянута, и $a > 0$ — тело $2m$ действительно идёт вниз.



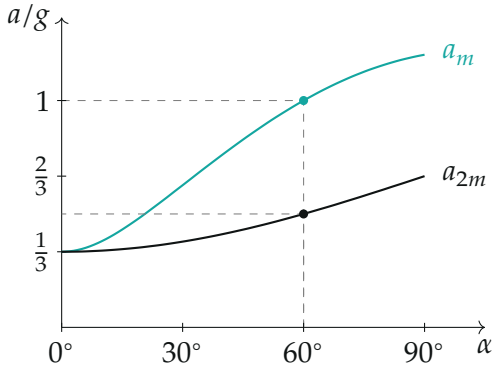
Ускорения при $\alpha = 60°$ (в масштабе: g — 2 см). Тело $2m$: $a = \frac{g}{2}$ вниз. Тело m: $a_\parallel = a = \frac{g}{2}$ по нити к блоку и $a_\perp = g\sin\alpha$ поперёк; их сумма $\vec{a}_m$ имеет модуль g. Пунктирная дуга — окружность вокруг блока: поперечное смещение идёт по ней, и длина нити не меняется

6. Полное ускорение тела m. Составляющие вдоль нити и поперёк перпендикулярны, поэтому

$$a_m = \sqrt{a^2 + a_\perp^2} = \frac{g}{3}\sqrt{9\sin^2\alpha + (2-\cos\alpha)^2}$$
$$= \frac{g}{3}\sqrt{13 - 4\cos\alpha - 8\cos^2\alpha}.$$

Направлено оно под углом φ к нити, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a_\perp}{a} = \dfrac{3\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$, в сторону блока и вертикали.

Проверка. Три частных случая. $\alpha = 0$: тела висят на одной вертикали, получается машина Атвуда, $a = \frac{g}{3}$, тело m поднимается с тем же ускорением, а $a_\perp = 0$, $a_m = \frac{g}{3}$ — верно. $\alpha = 90°$: нить около тела m горизонтальна, натяжение T даёт ему только горизонтальное ускорение: $T = ma$ и $2ma = 2mg - T$, откуда $a = \frac{2g}{3}$; вертикально тело m падает свободно ($a_\perp = g$), $a_m = \frac{g}{3}\sqrt{13}$ — по формуле при $\cos\alpha = 0$ то же. $\alpha = 60°$: $a = \frac{g}{2}$, $a_m = g$. Независимо те же результаты дают уравнения Лагранжа для системы с координатами «длина нити ℓ и угол» — $\ddot\ell = -g\,(2-\cos\alpha)/3$, $\ell\ddot\theta = -g\sin\alpha$ при $\dot\ell = \dot\theta = 0$.



Ускорения как функции угла отклонения: $a_{2m} = \frac{g}{3}(2-\cos\alpha)$ и a_m; при $\alpha = 0$ оба равны $\frac{g}{3}$, при $\alpha = 60°$ — $\frac{g}{2}$ и g

Ответ. Тело $2m$ — вниз с ускорением $a_{2m} = \dfrac{g(2-\cos\alpha)}{3}$; тело m — $a_m = \dfrac{g}{3}\sqrt{13 - 4\cos\alpha - 8\cos^2\alpha}$ (составляющие: $\frac{g(2-\cos\alpha)}{3}$ к блоку вдоль нити и $g\sin\alpha$ поперёк).