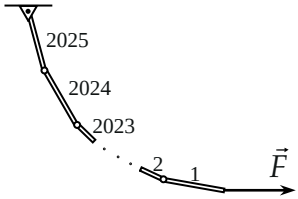
Цепочка из 2025 шарнирных стержней

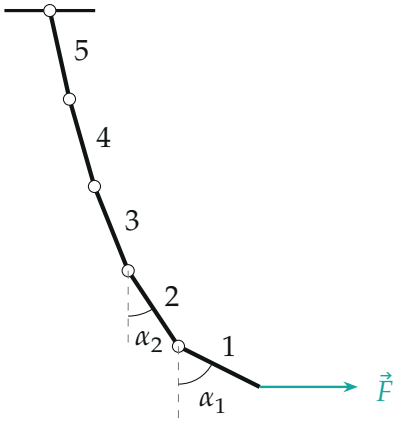
Задача 5. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 10 класс, задача 5] «Цепочка из 2025 шарнирных стержней».

2025 одинаковых стержней массой m каждый соединены шарнирно и подвешены за 2025-ый стержень к потолку. На нижний конец нижнего стержня действует горизонтальная сила F. Найти угол между 2025-м стержнем и вертикалью в равновесии.



▲ **Решение. Что происходит.** Цепочка провисает, как нить под нагрузкой, и наклон стержней растёт вниз: чем ниже стержень, тем больше сил его тянет вбок. Решать всю цепочку сразу не нужно. Главная идея: мысленно отрежем нижние стержни, и сила, с которой они действуют на k-й стержень в шарнире, найдётся из условия равновесия этой нижней части — по силам, без учёта её формы. Тогда для k-го стержня остаётся одно условие моментов, из которого угол α_k находится сразу.

Обозначения. Стержни нумеруем снизу вверх: нижний — первый, верхний, прикреплённый к потолку, — 2025-й. l — длина стержня, α_k — угол k-го стержня с вертикалью, все стержни отклонены в сторону силы F. Все шарниры считаем идеальными: момент силы в шарнире равен нулю.

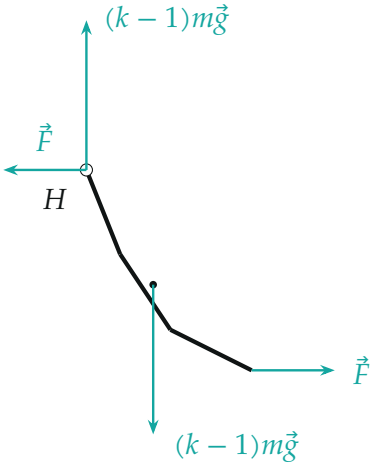


Цепочка из пяти стержней в равновесии для $F = mg$ (углы вычислены по найденной ниже формуле: 63,4°, 33,7°, 21,8°, 15,9°, 12,5° снизу вверх). Стержни снизу вверх наклонены всё меньше; цифры — номера стержней, показаны углы α_1 и α_2

1. Нижняя часть как одно тело. Отрежем $k-1$ нижних стержней (по шарниру H между $(k-1)$-м и k-м). Эта часть покоится под действием трёх сил: горизонтальной $\vec{F}$ на нижнем конце, суммарной силы тяжести $(k-1)m\vec{g}$ и силы $\vec{R}$ со стороны k-го стержня в шарнире H. Равновесие по силам, независимо от формы части:

$$\vec{R} + \vec{F} + (k-1)m\vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = -F, \quad R_y = +(k-1)mg.$$

Значит, на k-й стержень в шарнире H нижняя часть действует силой, равной $\vec{R}$ с обратным знаком: горизонтально вправо F и вертикально вниз $(k-1)mg$.



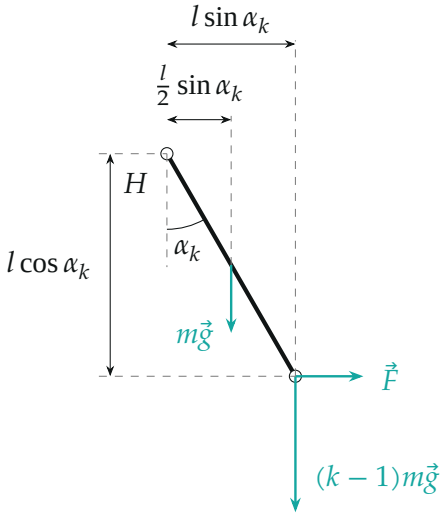
Нижняя часть (для $k-1=3$ стержней). Внешние силы: $\vec{F}$ внизу, тяжесть $(k-1)m\vec{g}$ из центра масс и сила $\vec{R}$ в шарнире H (показана своими составляющими: F влево и $(k-1)mg$ вверх). Сумма сил равна нулю при любой форме части

2. Моменты для k-го стержня. На k-й стержень действуют: в верхнем шарнире — сила от стержня выше (линия действия через шарнир), её момент относительно этого шарнира равен нулю — поэтому его и берём за ось; в нижнем — сила из пункта 1 (F вправо и $(k-1)mg$ вниз), тяжесть mg в середине стержня. Запишем условие моментов относительно верхнего шарнира, плечи показаны на рисунке:

- сила F вращает стержень так, чтобы поднять нижний конец вправо: плечо $l\cos\alpha_k$, момент $+F\,l\cos\alpha_k$;
- силы тяжести тянут нижний конец вниз, то есть к вертикали: плечи $l\sin\alpha_k$ и $\frac{l}{2}\sin\alpha_k$, моменты $-(k-1)mg\,l\sin\alpha_k$ и $-mg\,\frac{l}{2}\sin\alpha_k$.

Сумма моментов равна нулю:

$$F\,l\cos\alpha_k=\Big[(k-1)+\frac{1}{2}\Big]mg\,l\sin\alpha_k \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha_k=\frac{2F}{(2k-1)\,mg}.$$



k-й стержень: силы на его нижнем конце и в середине, плечи относительно верхнего шарнира H (показаны размерными линиями). Реакцию в шарнире H не рисуем — её момент относительно H равен нулю

3. Ответ для 2025-го стержня. Подставим $k = 2025$: $2k - 1 = 4049$,

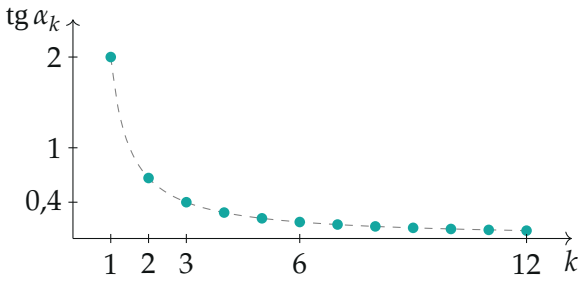
$$\operatorname{tg}\alpha_{2025} = \frac{2F}{4049\,mg}, \qquad \alpha_{2025} = \operatorname{arctg}\frac{2F}{4049\,mg}.$$

Обратите внимание: углы нижних стержней знать не нужно — в условие моментов вошли только внешние силы на нижнюю часть, а не её форма. Поэтому и формула получилась одним шагом для любого k.

4. Второй способ — принцип возможных перемещений. Повернём k-й стержень на малый угол $d\alpha$ вокруг верхнего шарнира, а нижнюю часть сдвинем без поворота: её точки сместятся так же, как нижний конец k-го стержня. Нижний конец поднимется на $l\sin\alpha_k\,d\alpha$ и сместится вправо на $l\cos\alpha_k\,d\alpha$. Работа силы F — $F\,l\cos\alpha_k\,d\alpha$; потенциальная энергия возрастает на $(k-1)mg\cdot l\sin\alpha_k\,d\alpha$ (нижняя часть) и на $mg\cdot\frac{l}{2}\sin\alpha_k\,d\alpha$ (середина k-го стержня поднялась вдвое меньше). В равновесии работа равна приращению энергии:

$$F\,l\cos\alpha_k\,d\alpha = \Big[(k-1)+\frac{1}{2}\Big]mg\,l\sin\alpha_k\,d\alpha,$$

то же уравнение.



Зависимость $\operatorname{tg}\alpha_k = \frac{2F}{(2k-1)mg}$ *от номера стержня для* $F = mg$*: у нижнего* $\operatorname{tg}\alpha_1 = 2$*, дальше наклон падает быстро и ложится на гиперболу; для* $k = 2025$ *значение* $\approx 5 \cdot 10^{-4}$

Проверка. Один стержень ($k = 1$): $Fl\cos\alpha = mg\frac{l}{2}\sin\alpha$, то есть $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2F}{mg}$ — верно. При $F \to 0$ получаем $\alpha_k \to 0$: цепочка висит вертикально. Равновесие цепочки из пяти стержней при $F = mg$ дополнительно проверено численно: минимизация потенциальной энергии даёт $\operatorname{tg}\alpha_k = 2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{7},\ \frac{2}{9}$ — совпало с формулой. Размерность: $F/(mg)$ безразмерно.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha_{2025} = \dfrac{2F}{4049\,mg}$, то есть $\alpha_{2025} = \operatorname{arctg}\dfrac{2F}{4049\,mg}$.