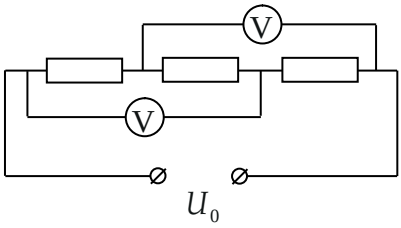
Два вольтметра на последовательных резисторах

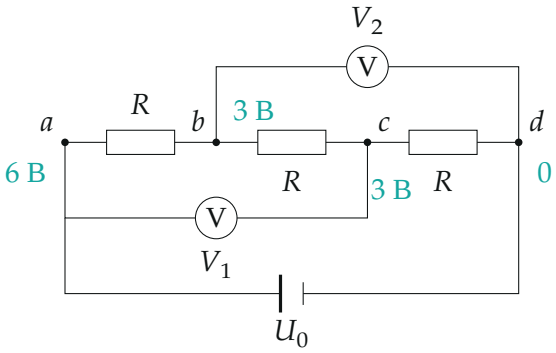
Задача 2. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 11 класс, задача 2] «Два вольтметра на последовательных резисторах».

В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, три одинаковых резистора соединены последовательно и подключены к идеальному источнику напряжения $U_0 = 6$ В. Два одинаковых вольтметра подключены так, как показано на рисунке; при этом показания каждого вольтметра составляют $U = 3$ В. Что будет показывать один из них, если второй вообще отключить от цепи (не меняя соединение остальных элементов)?



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на расчёт цепи постоянного тока с неидеальными вольтметрами. Вольтметр — это резистор r, показывающий напряжение на себе. Будь вольтметры идеальными ($r \to \infty$), каждый показал бы напряжение на двух резисторах из трёх, $\frac{2}{3}U_0 = 4$ В. Показывают они 3 В — значит, через них течёт заметный ток, и по показаниям можно найти r. Потом пересчитываем цепь без одного вольтметра.

Обозначения. R — сопротивление резистора, r — вольтметра; узлы a, b, c, d слева направо (рисунок ниже), φ — потенциалы узлов, $\varphi_d = 0$, $\varphi_a = U_0$; V_1 — вольтметр между a и c, V_2 — между b и d.



Та же схема с обозначениями узлов; бирюзой — потенциалы, найденные в шаге 1

1. Потенциалы узлов. Вольтметр V_1 показывает $\varphi_a - \varphi_c = 3$ В, значит, $\varphi_c = 6 - 3 = 3$ В. Вольтметр V_2 показывает $\varphi_b - \varphi_d = 3$ В, значит, $\varphi_b = 3$ В. Концы среднего резистора при одном потенциале — по закону Ома ток через него равен нулю.

2. Сопротивление вольтметра. Первое правило Кирхгофа для узла b: ток, пришедший через левый резистор, уходит через V_2 (через средний резистор тока нет). По закону Ома:

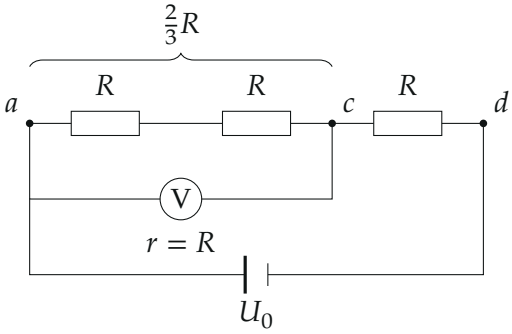
$$\frac{\varphi_a - \varphi_b}{R} = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{r} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{R} = \frac{3}{r} \quad \Longrightarrow \quad r = R.$$

Вольтметр по сопротивлению равен резистору. (Для узла c получится то же — схема симметрична.)

3. Отключаем вольтметр V_2. Остаются три резистора и V_1 между узлами a и c. Участок a–c: вольтметр $r = R$ параллельно двум последовательным резисторам $2R$:

$$R_{ac} = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3}R.$$

Последовательно с ним — правый резистор R.



После отключения V_2: участок a–c — $2R$ параллельно вольтметру, к нему последовательно R

4. Показание. Ток в неразветвлённой части один и тот же, поэтому напряжения на последовательных участках относятся как их сопротивления (закон Ома):

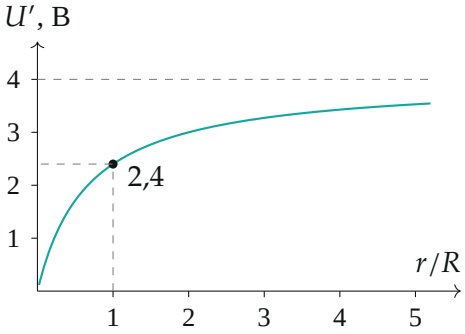
$$U' = U_0 \frac{R_{ac}}{R_{ac} + R} = U_0 \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{2}{3}R + R} = \frac{2}{5}U_0 = 2{,}4\ \text{В}.$$

Вольтметр V_1 стоит как раз на участке a–c и показывает U'.

5. Второй способ — через потенциал узла c. Первое правило Кирхгофа для узла c (через V_1 и через два резистора приходит ток, через правый резистор уходит):

$$\frac{U_0 - \varphi_c}{R} + \frac{U_0 - \varphi_c}{2R} = \frac{\varphi_c}{R} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_c = \frac{3}{5}U_0 = 3{,}6\ \text{В},$$

$$U' = \varphi_a - \varphi_c = U_0 - \varphi_c = 2{,}4\ \text{В}.$$



Показание оставшегося вольтметра в зависимости от его сопротивления; пунктир сверху — идеальный вольтметр, $\frac{2}{3}U_0 = 4$ В

Обратите внимание. Если бы вольтметры были идеальными, отключение одного ничего бы не изменило. Здесь показание оставшегося вольтметра *падает* с 3 до 2,4 В: пока стоял V_2, он шунтировал правую часть цепи и поднимал напряжение на участке a–c.

Проверка. Пределы формулы $U' = U_0 R_{ac}/(R_{ac} + R)$ при произвольном r, $R_{ac} = 2Rr/(2R + r)$: при $r \to \infty$ получаем $\frac{2}{3}U_0$ — идеальный вольтметр; при $r \to 0$ — ноль (вольтметр закорачивает участок). Значение 2,4 В лежит между ними.

Ответ. $U' = \dfrac{2}{5}U_0 = 2{,}4$ В.