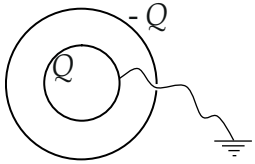
Две концентрические сферы и заземление

Задача 3. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 11 класс, задача 3] «Две концентрические сферы и заземление».

Две концентрические сферы радиусов R и $2R$ заряжены зарядами Q и $-Q$ соответственно. Внутреннюю сферу заземляют с помощью очень тонкого и длинного проводника, не контактирующего с внешней сферой (см. рисунок). Протечёт ли в процессе установления равновесия по проводнику в направлении внутренней сферы какой-то заряд, и если да, то какой? Концентрическими называются сферы, у которых совпадают центры. Электроёмкостью проводника пренебречь.



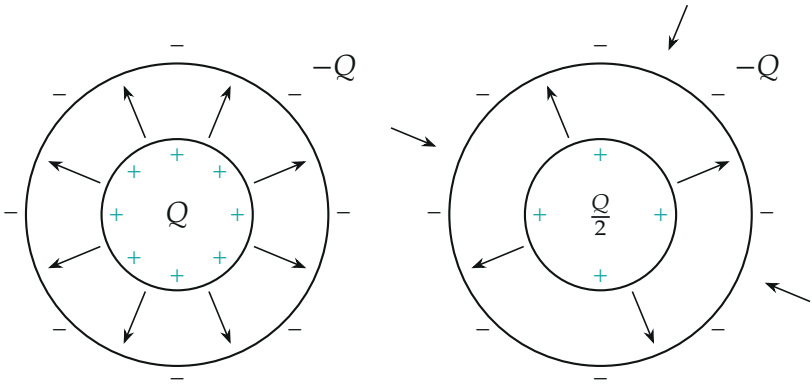
▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на потенциал системы проводящих сфер. Заземление делает потенциал внутренней сферы равным потенциалу Земли, то есть нулю (Земля — проводник огромной ёмкости, её потенциал не меняется). Заряд по проводнику течёт, пока потенциал сферы не станет нулевым. Значит, надо найти, каким должен быть заряд внутренней сферы при $\varphi = 0$, и сравнить с начальным Q.

Обозначения. q — заряд внутренней сферы после установления равновесия, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, Δq — заряд, протёкший по проводнику к внутренней сфере; r — расстояние от центра.

1. Потенциал заряженной сферы. Заряд q, равномерно распределённый по сфере радиуса a, снаружи создаёт поле точечного заряда в центре, а внутри поля не создаёт (теорема Гаусса). Поэтому его потенциал (ноль — на бесконечности)

$$\varphi(r) = \frac{kq}{r} \quad (r \geq a), \qquad \varphi(r) = \frac{kq}{a} \quad (r \leq a)$$

— внутри сферы постоянный, равный потенциалу на её поверхности. Тонкий проводник с пренебрежимо малой ёмкостью своего заряда не несёт, и заряды сфер остаются распределёнными равномерно.



до заземления после заземления

Заряды и поле: до заземления поле только между сферами; после — снаружи появляется поле суммарного заряда $-Q/2$ (провод заземления не показан)

2. Потенциал внутренней сферы до заземления. По принципу суперпозиции складываем вклады обеих сфер. Внутренняя сфера находится внутри внешней, и внешняя создаёт на ней свой постоянный потенциал $k(-Q)/(2R)$:

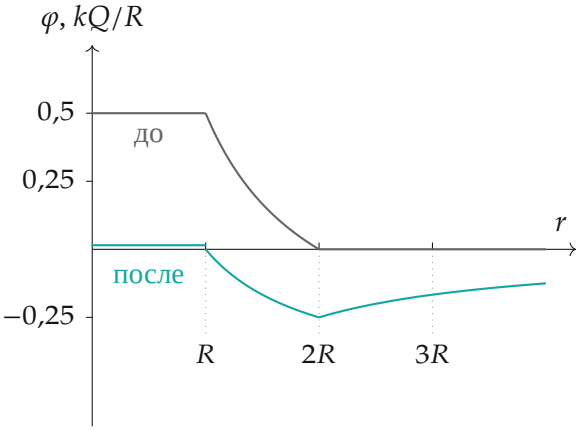
$$\varphi_1 = \frac{kQ}{R} + \frac{k(-Q)}{2R} = \frac{kQ}{2R} > 0.$$

Потенциал положителен — выше, чем у Земли. При заземлении положительный заряд уходит со сферы в Землю (электроны идут из Земли к сфере), пока потенциал не станет нулём.

3. Заряд после заземления. Условие равновесия — потенциал внутренней сферы равен потенциалу Земли:

$$\varphi_1' = \frac{kq}{R} + \frac{k(-Q)}{2R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad q = \frac{Q}{2}.$$

Заряд внешней сферы не меняется: она с проводником не контактирует.

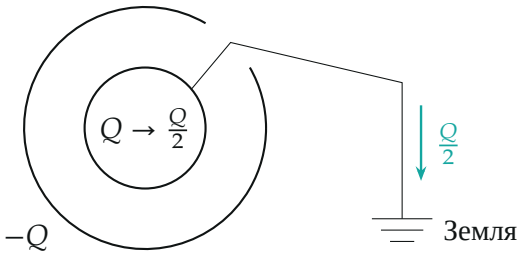


Потенциал $\varphi(r)$ (в единицах kQ/R, по формулам шага 1): до заземления внутренняя сфера при $\frac{kQ}{2R}$, после — при нуле

4. Протёкший заряд. Закон сохранения заряда для внутренней сферы: что пришло по проводнику, то и прибавилось:

$$\Delta q = q - Q = \frac{Q}{2} - Q = -\frac{Q}{2}.$$

Знак минус: в направлении внутренней сферы протёк заряд $-Q/2$, то есть заряд $Q/2$ ушёл со сферы в Землю.



По проводнику в Землю уходит заряд $Q/2$ (к сфере течёт $\Delta q = -Q/2$)

Обратите внимание. Заземлённая сфера не обязательно разряжается полностью. Ноль — это её потенциал, а не заряд: внешняя сфера с зарядом $-Q$ «тянет» потенциал вниз, и чтобы его скомпенсировать, на внутренней остаётся $+Q/2$.

Проверка. Второй способ — через поле: потенциал внутренней сферы относительно бесконечности равен работе поля при переносе единичного заряда от неё на бесконечность. Между сферами поле kq/r^2, снаружи $k(q-Q)/r^2$:

$$\varphi_1' = \int_R^{2R} \frac{kq}{r^2}dr + \int_{2R}^{\infty} \frac{k(q-Q)}{r^2}dr = \frac{kq}{2R} + \frac{k(q-Q)}{2R},$$

$$\varphi_1' = \frac{k(2q-Q)}{2R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad q = \frac{Q}{2}.$$

То же. Размерность: Δq — заряд. Предел: если бы внешней сферы не было, $q = 0$ — уединённая заземлённая сфера разряжается полностью.

Ответ. Да: в направлении внутренней сферы протечёт заряд $\Delta q = -\dfrac{Q}{2}$, то есть заряд $\dfrac{Q}{2}$ уйдёт с внутренней сферы в Землю.