Тело на доске с трением

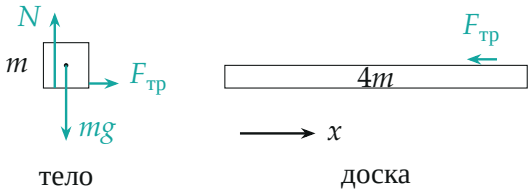
Задача 4. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 11 класс, задача 4] «Тело на доске с трением».

Точечное тело массой m лежит на конце доски длиной l и массой $4m$. Доска находится на гладкой горизонтальной поверхности (см. рисунок). Коэффициент трения между доской и телом равен μ, трения между доской и поверхностью нет. Какую минимальную скорость v надо толчком сообщить доске в направлении того конца, на котором лежит тело, чтобы доска выскользнула из-под тела?



▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача «брусок на доске»: доска после толчка едет под телом, тело проскальзывает назад относительно доски, и сила трения скольжения разгоняет тело и тормозит доску. Если скорости сравняются раньше, чем тело доедет до заднего конца, дальше они едут вместе. Минимальная скорость — та, при которой тело оказывается на заднем конце ровно в момент выравнивания скоростей. Удобнее всего решать в системе отсчёта доски — через относительное движение.

Обозначения. Ось x — по направлению толчка; a_1, a_2 — модули ускорений тела и доски; t_1 — момент, когда скорости сравнялись; u — общая скорость в этот момент; $F_{\text{тр}}$ — сила трения между телом и доской.



Горизонтальные силы трения: на тело — вперёд (доска уезжает из-под него), на доску — назад (третий закон Ньютона). На доске трение приложено к её верхней грани под телом; вертикальные силы на доску ($4mg$, давление тела, реакция пола) не показаны; $\mu = 0{,}4$

1. Сила трения. Тело проскальзывает, поэтому трение — скольжения. Второй закон Ньютона для тела по вертикали: $N = mg$, значит, $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$. Направление: доска движется вперёд быстрее тела, тело относительно доски скользит назад, и трение на тело направлено вперёд, по x; на доску — назад (третий закон Ньютона). Пол гладкий, горизонтальная сила на доску одна.

2. Ускорения. Второй закон Ньютона в проекции на x:

$$\text{тело: } ma_1 = \mu mg \Rightarrow a_1 = \mu g; \qquad \text{доска: } -4ma_2 = -\mu mg \Rightarrow a_2 = \frac{\mu g}{4}.$$

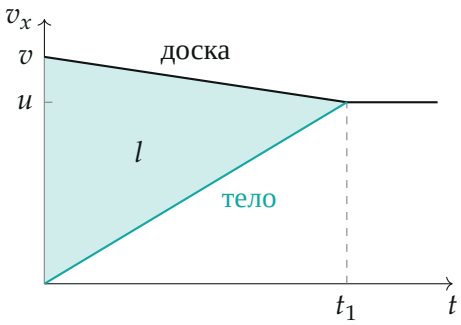
Тело разгоняется, доска тормозится, оба движения равноускоренные, пока есть проскальзывание.

3. Относительное движение. В системе отсчёта доски тело в начале имеет скорость $-v$ (назад) и ускорение $a_1 + a_2 = \frac{5}{4}\mu g$ (вперёд) — относительное ускорение складывается из ускорения тела и торможения доски. Тело относительно доски тормозится равнозамедленно и останавливается через

$$t_1 = \frac{v}{a_1 + a_2} = \frac{4v}{5\mu g},$$

пройдя относительно доски путь (формула пути равнозамедленного движения)

$$s = \frac{v^2}{2(a_1 + a_2)} = \frac{2v^2}{5\mu g}.$$



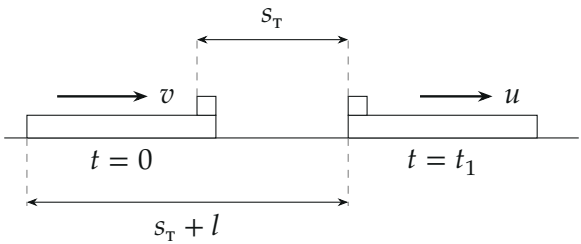
Графики скоростей при минимальной v: площадь между ними (закрашена)

— путь тела относительно доски, равный l; $u = \frac{4}{5}v$

4. Условие выскальзывания. Доска выскользнет, если тело пройдёт относительно неё всю длину l раньше, чем скорости сравняются: $s \geq l$. Минимальная скорость — при $s = l$:

$$\frac{2v^2}{5\mu g} = l \quad \Longrightarrow \quad v_{\min} = \sqrt{\frac{5}{2}\,\mu g l}.$$

При меньшей скорости тело останавливается относительно доски, не доехав до края, и дальше они едут вместе с общей скоростью u.



Начало и момент t_1 при минимальной скорости: тело дошло до заднего края доски, скорости равны u; по полу тело сместилось на $s_m = \frac{4}{5}l$, доска — на $s_m + l$ (масштаб соблюдён)

5. Второй способ — законы сохранения. Горизонтальных внешних сил нет — закон сохранения импульса системы «тело + доска» по x от толчка до момента t_1:

$$4mv = (4m + m)u \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{4}{5}v.$$

Изменение кинетической энергии системы равно работе силы трения на относительном перемещении (работа пары сил трения $-\mu mg\,l$, выделившееся тепло):

$$\frac{4mv^2}{2} - \frac{5mu^2}{2} = \mu mgl \quad \Longrightarrow \quad 2v^2 - \frac{8}{5}v^2 = \mu g l \quad \Longrightarrow \quad v^2 = \frac{5}{2}\mu g l.$$

То же.

Обратите внимание. Сравнивать надо не путь доски с путём тела по отдельности, а их разность — путь тела относительно доски. Ускорения складываются: $a_1 + a_2$, а не вычитаются, потому что тело разгоняется, а доска тормозится.

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{м/с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м/с}$. Предел: очень тяжёлая доска ($M \gg m$) почти не тормозится, $a_1 + a_2 \to \mu g$ и $v_{\min} \to \sqrt{2\mu g l}$ — как у тела, которое тормозится трением на неподвижной поверхности на пути l; при общем M формула $v^2 = 2\mu g l(1 + m/M)$ при $M = 4m$ даёт $\frac{5}{2}\mu g l$.

Ответ. $v_{\min} = \sqrt{\frac{5}{2}\,\mu g l}$.