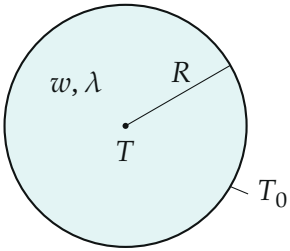
Радиоактивный шар: температура в центре

Задача 5. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 11 класс, задача 5] «Радиоактивный шар: температура в центре».

Шар радиуса R сделан из радиоактивного металла. Благодаря радиоактивным распадам в единице объёма вещества шара в единицу времени выделяется количество теплоты w. Найдите температуру в центре шара, если его поверхность поддерживается при температуре T_0, а коэффициент теплопроводности материала шара равен λ.

Указание. Количество тепла q, переносимого в единицу времени через единицу площади тонкого слоя толщиной Δx, одна поверхность которого поддерживается при температуре t_1, вторая — при температуре t_2, определяется законом $q = \lambda(t_2 - t_1)/\Delta x$, где λ — коэффициент теплопроводности (закон Фурье).



Поясняющий рисунок: шар с источниками тепла, поверхность при T_0, ищем T в центре

▲ **Решение.** **Что происходит.** Стационарная теплопроводность с внутренними источниками. Тепло рождается по всему объёму и уходит наружу через поверхность. Режим установившийся: температура нигде не меняется, значит, через любую сферу радиуса r уходит ровно столько тепла, сколько выделяется внутри неё. Это даёт поток тепла $q(r)$, а закон Фурье превращает поток в перепад температуры на тонком слое. Складывая перепады всех слоёв от центра до поверхности, получаем ответ.

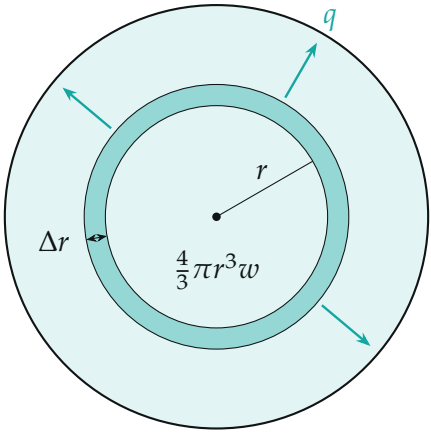
Обозначения. r — радиус сферы, Δr — толщина тонкого сферического слоя, $q(r)$ — поток тепла через единицу площади сферы радиуса

r (наружу), $t(r)$ — температура на расстоянии r от центра, Δt — перепад температуры на слое.

1. Поток тепла через сферу радиуса r. По симметрии температура зависит только от r, и тепло течёт по радиусу наружу (от горячего центра к холодной поверхности). Закон сохранения энергии для шара радиуса r в установившемся режиме: мощность тепловыделения внутри равна потоку тепла через его поверхность:

$$4\pi r^2 q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 w \quad \Longrightarrow \quad q(r) = \frac{wr}{3}.$$

Поток растёт линейно с радиусом: у центра он ноль (внутри маленькой сферы почти ничего не выделяется).



Тонкий сферический слой радиуса r: всё тепло, выделенное внутри него, уходит через слой наружу

2. Перепад температуры на слое. Закон Фурье для тонкого слоя толщины Δr (слой тонкий, его можно считать плоским; тепло течёт от внутренней поверхности к внешней, температура падает наружу на Δt):

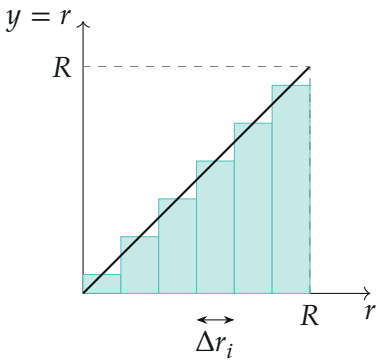
$$q = \lambda \frac{\Delta t}{\Delta r} \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = \frac{q\,\Delta r}{\lambda} = \frac{w}{3\lambda}\, r\,\Delta r.$$

3. Сумма по слоям. Разобьём шар на слои от центра до поверхности.

Температура в центре выше температуры поверхности на сумму перепадов всех слоёв:

$$T - T_0 = \frac{w}{3\lambda} \sum_i r_i \Delta r_i.$$

Сумма $\sum r_i \Delta r_i$ — площадь под графиком $y = r$ от 0 до R, то есть площадь прямоугольного треугольника с катетами R и R: $\frac{R^2}{2}$ (рисунок ниже).



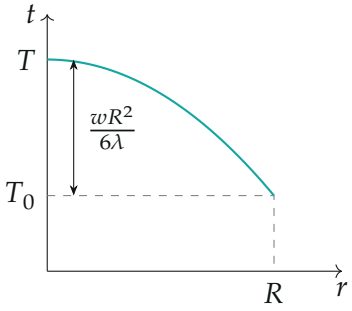
Сумма $\sum r_i \Delta r_i$ — площадь ступенек (ширина Δr_i, высота r_i); при тонких слоях — площадь треугольника $R^2/2$

$$T = T_0 + \frac{w}{3\lambda} \cdot \frac{R^2}{2} = T_0 + \frac{wR^2}{6\lambda}.$$

4. Профиль температуры. Если суммировать перепады не от центра, а от радиуса r до поверхности, площадь трапеции равна $\frac{R^2 - r^2}{2}$:

$$t(r) = T_0 + \frac{w}{6\lambda} (R^2 - r^2)$$

— перевёрнутая парабола с вершиной в центре.



Температура внутри шара: максимум в центре, у поверхности кривая круче — там больше поток $q = wr/3$

Обратите внимание. Перепад температуры набирается в основном у поверхности: на внешнюю половину радиуса приходится $\frac{3}{4}$ всего перепада ($\frac{R^2 - R^2/4}{R^2}$). Поток через сферу пропорционален не площади, а отношению «объём/площадь» $= r/3$.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Вт/м}^3 \cdot \text{м}^2}{\text{Вт/(м} \cdot \text{К)}} = \text{К}$. Баланс на поверхности: по профилю $\lambda \left|\frac{\Delta t}{\Delta r}\right|_{r=R} = \lambda \cdot \frac{w}{6\lambda} \cdot 2R = \frac{wR}{3}$, и $4\pi R^2 \cdot \frac{wR}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 w$ — через поверхность уходит вся выделенная мощность. Чем лучше теплопроводность ($\lambda \to \infty$), тем ближе T к T_0.

Ответ. $T = T_0 + \dfrac{wR^2}{6\lambda}$.