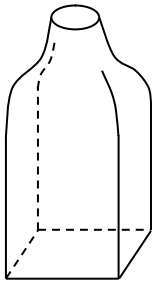
Объём античной бутылки

Задача 2. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 7 класс, задача 2] «Объём античной бутылки».

При раскопках древнеримского города археологи нашли бутылку, имеющую такую форму: нижняя часть бутылки имеет форму параллелепипеда, верхняя (объёмом меньше половины полного объёма) имеет неправильную форму (см. рисунок). Как, имея только линейку, сколько угодно воды и пробку для затыкания бутылки, измерить объём бутылки? Опишите последовательность действий и вычислений при измерении.

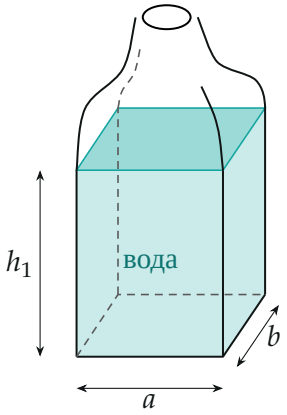


▲ **Решение.** **Что происходит.** Объём параллелепипеда линейкой измерить можно: $V = abh$. Объём «кривой» верхней части — нельзя. Обход такой: вода несжимаема, поэтому её объём $V_в$ не меняется при любых поворотах бутылки; всё остальное в закрытой бутылке — воздух, и его объём $V_{возд} = V - V_в$ тоже не меняется. Налив воды и перевернув бутылку, мы заставим воздух занять прямую часть, где его объём — снова параллелепипед. Два объёма, каждый из которых мерится линейкой, в сумме дают объём бутылки. Главная идея: измерить отдельно воду и отдельно воздух.

Обозначения. a и b — длина и ширина основания прямой части (стекло тонкое, поэтому внешние размеры равны внутренним); h_1 — высота столба воды при первом измерении; h_2 — высота слоя воздуха после переворота; $V_к$ — объём «кривой» части (неизвестен); V — объём бутылки, который надо найти.

1. Измеряем воду. Ставим бутылку на стол и наливаем воду до верха прямой части — до места, где вертикальные стенки переходят в «кривую» часть. Зачем именно до верха — объяснено в «Обратите внимание». Линейкой снимаем a, b и высоту столба воды h_1. Объём прямого параллелепипеда — произведение трёх его рёбер:

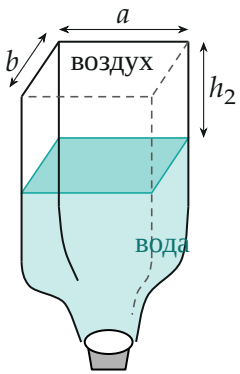
$$V_{\text{в}} = a\,b\,h_1.$$



Первое измерение: вода заполняет только прямую часть, линейкой снимаем a, b, h_1

2. Измеряем воздух. Затыкаем горлышко пробкой — вода не выльется, воздух не выйдет — и переворачиваем бутылку горлышком вниз. Вода стекает в «кривую» часть и занимает нижний слой прямой части, а над ней остаётся воздух. Этот слой воздуха — параллелепипед: стенки прямой части вертикальны, «дно» плоское, поверхность воды горизонтальна. Основание у него то же, $a \times b$, высота h_2 — от плоского «дна» бутылки до поверхности воды. Поэтому

$$V_{\text{возд}} = a\,b\,h_2.$$

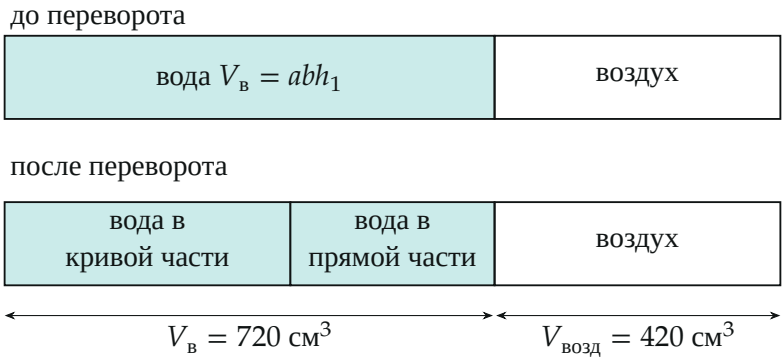


Бутылка вверх дном: «кривая» часть и низ прямой части заполнены водой, слой воздуха — параллелепипед $a \times b \times h_2$

3. Складываем. Бутылка целиком состоит из воды и воздуха, пробка их не выпускает, поэтому объёмы складываются:

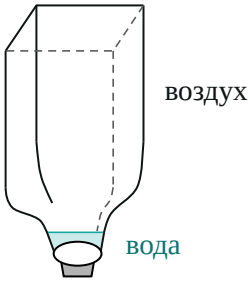
$$V = V_{\text{в}} + V_{\text{возд}} = a\,b\,h_1 + a\,b\,h_2 = a\,b\,(h_1 + h_2).$$

Основание у обоих параллелепипедов общее, так что a и b измеряются один раз. Схема ниже показывает, что при переворачивании меняется только расположение воды и воздуха, а не их объёмы (числа в схеме — пример: $a = 10$ см, $b = 6$ см, высота прямой части 12 см, $V_{\text{к}} = 420$ см^3).



Одна и та же вода (720 см^3) и один и тот же воздух (420 см^3) до и после переворота; $V = 720 + 420 = 1140$ см^3

Обратите внимание. Воды должно хватить, чтобы после переворота она заполнила всю «кривую» часть: тогда поверхность воды лежит в прямой части, и слой воздуха — параллелепипед. Объём «кривой» части меньше половины V, то есть меньше объёма abH прямой части (H — её высота), поэтому вода, налитая до верха прямой части, «кривую» часть заполнит. Если воды мало, поверхность окажется в «кривой» части (рисунок), и воздух линейкой не измерить: надо долить воды.



Воды слишком мало: после переворота она не доходит до прямой части — такой опыт не годится

Проверка. Результат не должен зависеть от того, сколько воды налили, лишь бы она заполняла «кривую» часть. Возьмём в примере $h_1 = 9$ см вместо 12 см: $V_в = 540$ см^3. После переворота 420 см^3 воды уходит в «кривую» часть, в прямой части остаётся 120 см^3, то есть слой воды высотой 2 см; воздух занимает остальные $12 - 2 = 10$ см: $h_2 = 10$ см. Тогда $V = 10 \cdot 6 \cdot (9 + 10) = 1140$ см^3 — то же число. В общем виде $h_1 + h_2 = H + V_к/(ab)$ не зависит от уровня воды. Предельный случай: если бы «кривой» части не было ($V_к \to 0$), получилось бы $h_1 + h_2 = H$ и $V = abH$ — обычный параллелепипед.

Смысл: сложный объём делят на две части, каждая из которых — параллелепипед; несжимаемость воды гарантирует, что в сумме получается весь объём.

Ответ. Налить воду до верха прямой части, измерить a, b, h_1; заткнуть, перевернуть и измерить высоту слоя воздуха h_2. Тогда $V = ab\,h_1 + ab\,h_2 = ab\,(h_1 + h_2)$.