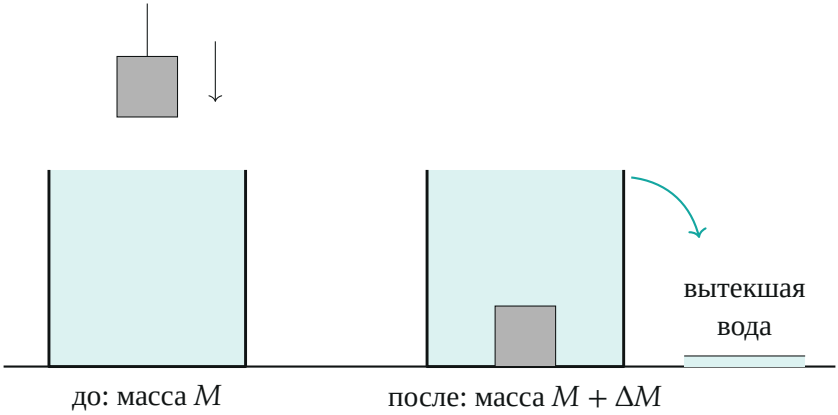
Железное тело в полном сосуде

Задача 1. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 7 класс, задача 1] «Железное тело в полном сосуде».

В открытый сосуд, заполненный водой до самого верхнего края, осторожно опустили железное тело массой $m = 100$ г. На сколько изменилась масса сосуда со всем его содержимым? Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, плотность железа $\rho_1 = 7800$ кг/м^3.



Поясняющий рисунок: тело опускают в сосуд, полный до краёв; вытесненная вода стекает через край и в сосуд не возвращается

▲ **Решение. Что происходит.** Сосуд полон, поэтому тело, входя в воду, вытесняет её: столько воды по объёму, сколько занимает тело, выливается через край. Массу сосуда с содержимым увеличивает тело и уменьшает вытекшая вода — она сосуду больше не принадлежит. Значит, изменение массы — это разность массы тела и массы вытекшей воды.

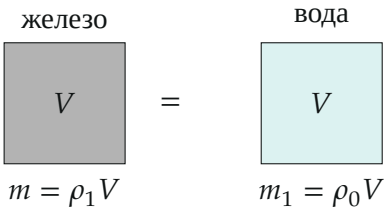
Обозначения. V — объём тела; m_1 — масса вытекшей воды; ΔM — изменение массы сосуда со всем содержимым.

1. Объём тела и вытекшей воды. Плотность — масса, делённая на объём, поэтому объём железного тела

$$V = \frac{m}{\rho_1}.$$

Железо плотнее воды ($\rho_1 > \rho_0$), тело тонет и погружается целиком. Сосуд был полон, значит, вытекло столько воды, сколько занимает тело: объём вытекшей воды тоже равен V.

Обратите внимание: так бывает только у тела, которое тонет. Плавающее тело вытеснило бы лишь объём своей погружённой части, а масса вытекшей воды оказалась бы равной массе тела (тогда $\Delta M = 0$).



Одинаковые объёмы V: $m/m_1 = \rho_1/\rho_0 = 7{,}8$

2. Масса вытекшей воды. Её объём равен V, плотность — ρ_0:

$$m_1 = \rho_0 V = \rho_0 \frac{m}{\rho_1} = \frac{\rho_0}{\rho_1} m.$$

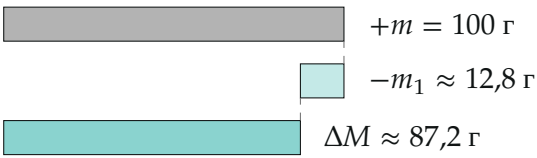
3. Изменение массы сосуда. К сосуду прибавилась масса m и убавилась масса m_1:

$$\Delta M = m - m_1 = m\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) = m\,\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1}.$$

Подставим числа:

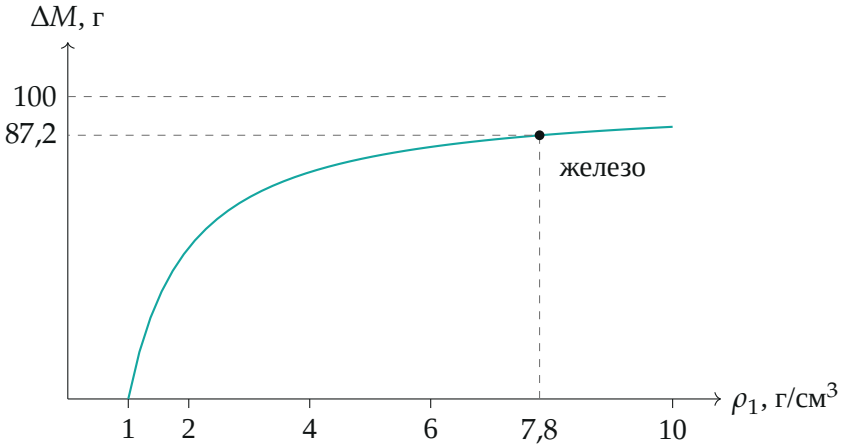
$$\Delta M = 100\text{ г} \cdot \frac{7800 - 1000}{7800} = 100\text{ г} \cdot \frac{68}{78} \approx 87{,}2\text{ г}.$$

Масса увеличилась: прибавилось больше, чем убыло (баланс масс на рисунке — в масштабе).



Второй способ. Числами сразу: $V = \dfrac{100\text{ г}}{7{,}8\text{ г/см}^3} \approx 12{,}8\text{ см}^3$, масса вытекшей воды $m_1 = 1\text{ г/см}^3 \cdot 12{,}8\text{ см}^3 \approx 12{,}8$ г, и $\Delta M = 100 - 12{,}8 \approx 87{,}2$ г.

Проверка. Размерность: $m \cdot \dfrac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1}$ — масса. Предел $\rho_1 \to \rho_0$: тело вытесняет воды ровно по своей массе, $\Delta M \to 0$. Предел $\rho_1 \to \infty$ (очень плотное тело почти не вытесняет воды): $\Delta M \to m$, как и должно быть.



Зависимость ΔM от плотности тела (масса тела 100 г, тело тонет, $\rho_1 > 1$ г/см^3): точка — железо

Смысл: из ста граммов железа в сосуде остаётся почти девять десятых — примерно восьмая часть массы тела унесена вытекшей водой.

Ответ. $\Delta M = m\dfrac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1} \approx 87{,}2$ г (масса увеличилась).