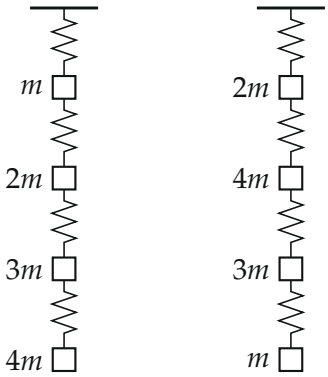
Четыре тела на пружинах

Задача 2. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 7 класс, задача 2] «Четыре тела на пружинах».

Четыре маленьких тела с массами m, $2m$, $3m$ и $4m$ привязаны четырьмя одинаковыми пружинами к горизонтальному потолку (см. левый рисунок). При этом нижнее тело опускается на величину Δl по сравнению с положением, когда пружины не деформированы. Затем те же тела подвешивают к потолку с помощью тех же пружин, но в другом порядке (см. правый рисунок). На сколько при этом опустилось или поднялось самое нижнее тело в цепочке тел по сравнению с положением самого нижнего тела в первоначальной цепочке тел?



▲ **Решение.** **Что происходит.** Тела и пружины висят одной цепочкой, поэтому каждая пружина держит всё, что висит под ней. По закону Гука удлинение пружины пропорционально силе, с которой её тянут, — то есть весу всех тел под ней. Нижнее тело опускается на сумму удлинений всех четырёх пружин. Значит, надо найти эту сумму для двух порядков тел и сравнить. Величина Δl в условии — это сумма для первого порядка, через неё выразим всё остальное.

Обозначения. k — жёсткость каждой пружины; F_i — сила упругости i-й сверху пружины; $\Delta l_i = F_i/k$ — её удлинение; штрих — второй порядок тел. Пружины считаем лёгкими, тела — точками.

1. Сила в пружине. Возьмём любую пружину и всё, что висит под ней, как одну систему. Система в равновесии: вверх её тянет сама пружина, вниз — сила тяжести тел под пружиной. Пружина лёгкая, поэтому

$$F_i = (\text{масса всех тел под } i\text{-й пружиной}) \cdot g.$$

Так $F_1 = 10mg$ — верхняя пружина держит всю цепочку, $m + 2m + 3m + 4m = 10m$.

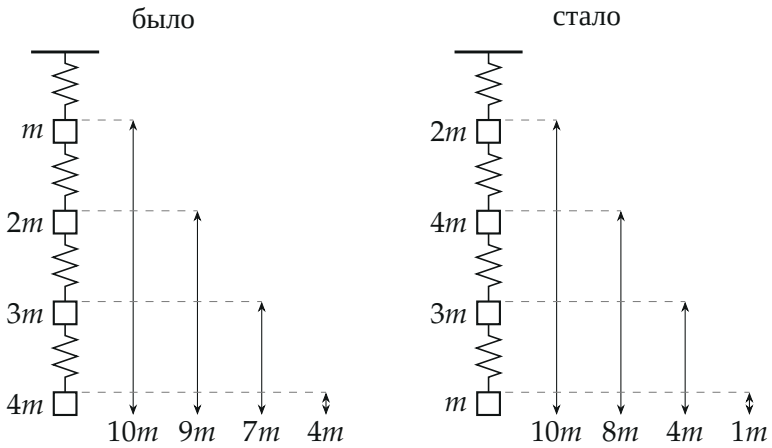
2. Первый порядок (m, $2m$, $3m$, $4m$ сверху вниз). Под пружинами сверху вниз висят $10m$, $9m$, $7m$, $4m$:

$$F_1 = 10mg, \quad F_2 = 9mg, \quad F_3 = 7mg, \quad F_4 = 4mg.$$

Закон Гука $\Delta l_i = F_i/k$ даёт удлинения, а опускание нижнего тела — их сумма (нижнее тело висит на конце четырёх последовательных пружин):

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = \frac{(10 + 9 + 7 + 4)\, mg}{k} = 30\,\frac{mg}{k}.$$

Отсюда выражение через данное в условии: $\dfrac{mg}{k} = \dfrac{\Delta l}{30}$.

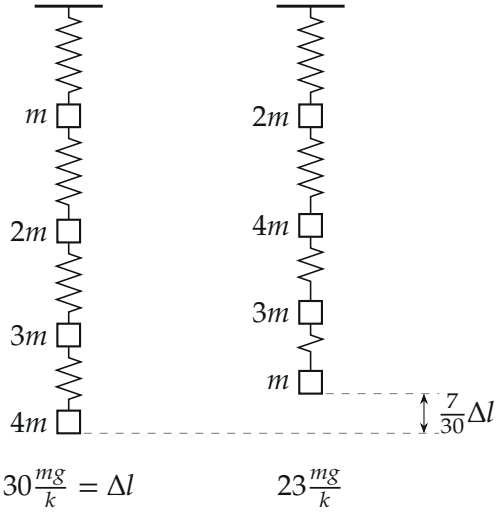


Нагрузка на пружину — масса всех тел под ней

3. Второй порядок ($2m$, $4m$, $3m$, m сверху вниз). Под пружинами сверху вниз: $10m$, $4m + 3m + m = 8m$, $3m + m = 4m$, m:

$$F'_1 = 10mg, \quad F'_2 = 8mg, \quad F'_3 = 4mg, \quad F'_4 = mg,$$

$$\Delta l' = \frac{(10 + 8 + 4 + 1)\, mg}{k} = 23\,\frac{mg}{k} = \frac{23}{30}\,\Delta l.$$



Длины пружин нарисованы пропорционально их удлинениям

4. Сравнение. Верхний конец цепочки (потолок) не двигается, поэтому положения нижнего тела сравниваются по сумме удлинений: стало $\Delta l' = \frac{23}{30}\Delta l < \Delta l$ — тело стало ниже на меньшую величину, то есть поднялось:

$$\Delta x = \Delta l - \Delta l' = \Delta l - \frac{23}{30}\Delta l = \frac{7}{30}\,\Delta l.$$

Знак словами: нижнее тело в новой цепочке *выше*, чем в старой.



Нагрузки на пружины: суммы 30 и 23 (в единицах mg)

Обратите внимание. Не складываем «массы тел в положении» — считаем нагрузку на каждую пружину отдельно: нижняя пружина несёт только нижнее тело, верхняя — всю цепочку. Именно поэтому порядок тел важен, хотя общий вес $10mg$ не меняется.

Проверка. Второй способ — по телам. Тело, которое висит j-м сверху, нагружает все j пружин над собой, поэтому его вклад в сумму удлинений — $j \cdot m_j g/k$. Первый порядок: $1 \cdot m + 2 \cdot 2m + 3 \cdot 3m + 4 \cdot 4m = 30m$. Второй: $1 \cdot 2m + 2 \cdot 4m + 3 \cdot 3m + 4 \cdot m = 23m$. Те же 30 и 23. Предельные порядки: тяжёлые вверху ($4m, 3m, 2m, m$) дают $4 + 6 + 6 + 4 = 20$, тяжёлые внизу (наш первый порядок) — 30; число 23 лежит между ними, как и должно быть для промежуточного порядка. Размерность: mg/k — сила, делённая на жёсткость, то есть длина.

Смысл: чем тяжелее тела внизу цепочки, тем больше пружин они растягивают, поэтому первый порядок самый «длинный».

Ответ. Нижнее тело поднялось на $\dfrac{7}{30}\,\Delta l$.