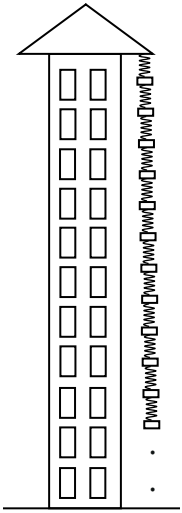
Сто грузов на пружинах

Задача 5. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 8 класс, задача 5] К крыше очень высокого здания подвесили 100 одинаковых грузов, связанных одинаковыми пружинами (см. рисунок). Известно, что когда пружины растянулись, и все грузы оказались в положении равновесия, сотый (сверху) груз опустился на величину Δl. На сколько опустился при этом пятидесятый (сверху) груз? Считать, что для любых удлинений пружин выполняется закон Гука. Грузы земли не касаются.



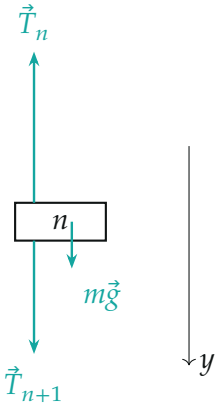
▲ **Решение.** **Что происходит.** Пружины подвешены одна под другой. Нижняя пружина держит один груз, следующая выше — два, и так до верхней, на которой висят все сто. Значит, чем выше пружина, тем сильнее она растянута. Опускание груза складывается из удлинений всех пружин *над* ним, а силу в пружине создают грузы *под* ней. Главная идея: найти удлинение каждой пружины из условия равновесия грузов и сложить удлинения.

Обозначения. m — масса одного груза, k — жёсткость пружины. Пружины и грузы нумеруем сверху: груз n висит под пружиной n (пружина

1 прикреплена к крыше, пружина 100 держит последний груз). T_i — сила упругости пружины i, Δ_i — её удлинение, s_n — опускание груза n (оно равно Δl при $n = 100$). Ось y направим вниз.

1. Силы в пружинах. Рассмотрим груз n в равновесии. Сверху на него действует пружина n с силой T_n (вверх), снизу пружина $n+1$ с силой T_{n+1} (вниз) и сила тяжести mg. Второй закон Ньютона при $a = 0$ в проекции на ось y:

$$mg + T_{n+1} - T_n = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n = T_{n+1} + mg.$$



Силы на груз n (длины стрелок по модулю: $T_n = T_{n+1} + mg$; пружины не показаны, сила в них направлена вдоль оси)

Нижняя пружина держит только последний груз: $T_{100} = mg$. Каждая следующая вверх держит на mg больше. Отсюда пружина i держит все грузы с номерами от i до 100, то есть $101 - i$ грузов:

$$T_i = (101 - i)\, mg.$$

2. Удлинения. Закон Гука для пружины i: $T_i = k\Delta_i$, поэтому

$$\Delta_i = \frac{(101 - i)\, mg}{k}.$$

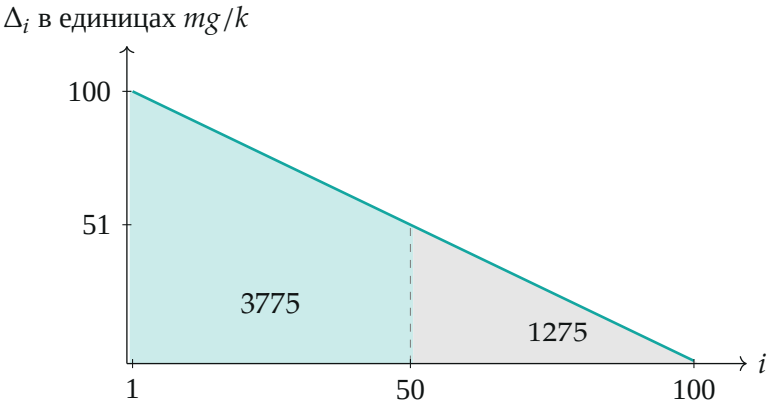
3. Опускание груза n. Груз n висит на конце цепочки из пружин $1, \dots, n$, поэтому он опустился ровно на сумму их удлинений:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \frac{mg}{k}(100 + 99 + \dots + (101 - n)).$$

Слагаемые образуют арифметическую прогрессию: сумма равна числу слагаемых, умноженному на полусумму крайних, $n \cdot \dfrac{100 + (101 - n)}{2}$. Получаем

$$s_n = \frac{mg}{k} \cdot \frac{n\,(201 - n)}{2}.$$

Обратите внимание: сила в пружине определяется грузами *под* ней, а опускание груза — пружинами *над* ним. Если сложить удлинения пружин под грузом, ответ будет неверным.



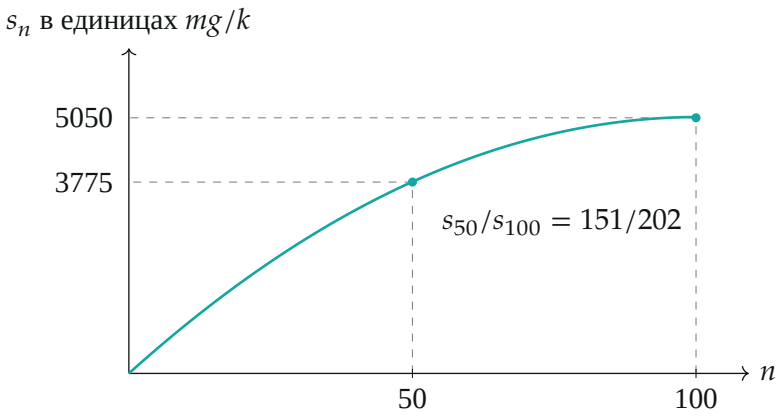
Удлинение пружины i линейно убывает от $100\,mg/k$ до mg/k; площадь под графиком — опускание груза: слева от $i = 50$ она равна 3775, справа 1275 (в единицах mg/k), всего 5050

4. Опускание сотого и пятидесятого грузов. При $n = 100$ и $n = 50$:

$$\Delta l = s_{100} = \frac{mg}{k} \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050\,\frac{mg}{k},$$
$$s_{50} = \frac{mg}{k} \cdot \frac{50 \cdot 151}{2} = 3775\,\frac{mg}{k}.$$

Делим одно на другое; жёсткость и масса сокращаются:

$$\frac{s_{50}}{\Delta l} = \frac{50 \cdot 151}{100 \cdot 101} = \frac{151}{202} \quad \Rightarrow \quad s_{50} = \frac{151}{202}\,\Delta l \approx 0{,}75\,\Delta l.$$



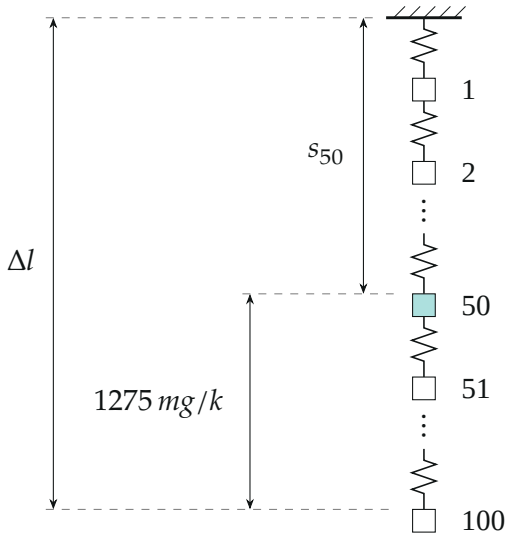
Опускание груза n как функция номера: кривая выпукла вверх, потому что верхние пружины растянуты сильнее нижних

Второй способ (без суммы по всем пружинам сразу). Разделим цепочку на две половины: пружины 1–50 и 51–100. Пружина 51 держит грузы 51–100 (их 50), пружина 52 — 49 грузов, и так до пружины 100 с одним грузом. Поэтому нижние пятьдесят пружин вместе растянуты на

$$\frac{mg}{k}\,(50 + 49 + \cdots + 1) = 1275\,\frac{mg}{k}.$$

Опускание груза 100 складывается из опускания груза 50 и этого растяжения, значит,

$$s_{50} = \Delta l - 1275\,\frac{mg}{k} = (5050 - 1275)\,\frac{mg}{k} = 3775\,\frac{mg}{k}.$$



Цепочка из пружин (длины не в масштабе): s_{50} — опускание пятидесятого груза, $\Delta l = s_{100}$; нижние пятьдесят пружин вместе растянуты на $1275\,mg/k$

Проверка. Размерность: $[mg/k] = \text{Н}/(\text{Н/м}) = \text{м}$, верно. Предел: один груз ($N = 1$, $n = 1$) в общей формуле

$$s_n = \frac{mg}{k} \cdot \frac{n\,(2N + 1 - n)}{2}$$

даёт $s = mg/k$, как и должно быть. Для середины цепочки, $n = N/2$, отношение $s_n/s_N = \dfrac{n(2N + 1 - n)}{N(N + 1)}$ при большом N стремится к $3/4$; у нас $N = 100$ и $0{,}7475$ — близко к $3/4$. Смысл: верхние пружины нагружены сильнее нижних, поэтому средний груз опускается не на половину, а примерно на три четверти полного опускания.

Ответ. Пятидесятый груз опустился на $\dfrac{151}{202}\,\Delta l \approx 0{,}75\,\Delta l$.