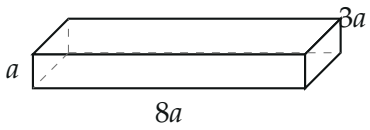
Давление бруска на разных гранях

Задача 1. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 8 класс, задача 1] Имеется брусок в форме прямоугольного параллелепипеда, длины рёбер которого относятся друг к другу как $1 : 3 : 8$. Брусок кладут на горизонтальную поверхность. Найти отношение давлений бруска на стол $p_1 : p_2 : p_3$, в случаях, когда он лежит на разных гранях (начиная с наименьшего, в порядке возрастания)?

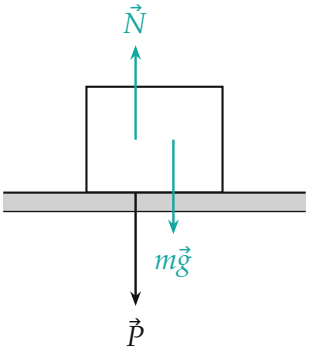
▲ **Решение. Что происходит.** Давление твёрдого тела на опору — это сила давления, делённая на площадь опоры. Брусок лежит на столе и покоится, поэтому сила, с которой он давит на стол, равна его весу и от выбора грани не зависит. Меняется только площадь, на которую эта сила распределена. Главная идея: давление обратно пропорционально площади опорной грани, поэтому наименьшее давление брусок оказывает, лёжа на самой большой грани.

Обозначения. a — наименьшее ребро; рёбра бруска a, $3a$, $8a$. m — масса бруска, S — площадь опорной грани, p — давление. У параллелепипеда три разные пары граней, поэтому три случая.



Брусок с рёбрами a, $3a$ и $8a$ (пунктиром показаны невидимые рёбра)

1. Сила давления на стол. На покоящийся брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$ вниз и сила реакции стола $\vec{N}$ вверх. Второй закон Ньютона при $a = 0$ в проекции на вертикаль даёт $N = mg$. По третьему закону Ньютона брусок давит на стол с такой же по модулю силой, $P = N = mg$, направленной перпендикулярно столу. От того, какой гранью лежит брусок, эта сила не зависит.

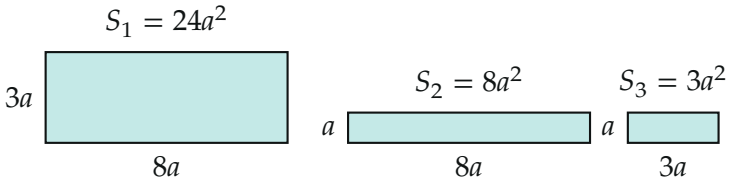


Силы на брусок ($\vec{N}$ и $m\vec{g}$, бирюзовые) и сила давления бруска на стол $\vec{P}$ (чёрная): $N = mg$ и $P = N$ по модулю

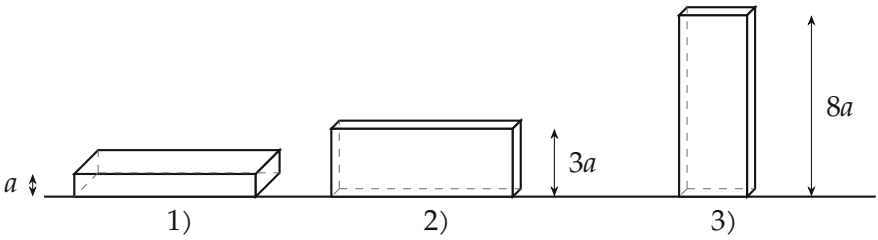
2. Площади опорных граней. Три грани:

$$S_1 = 3a \cdot 8a = 24a^2, \qquad S_2 = a \cdot 8a = 8a^2, \qquad S_3 = a \cdot 3a = 3a^2.$$

Пронумеруем случаи, как в условии, по возрастанию давления; давление растёт при уменьшении площади, поэтому случай 1 — самая большая грань, случай 3 — самая малая.



Вид сверху: опорные площади в трёх случаях (в одном масштабе). Бирюзовым закрашена площадь контакта со столом



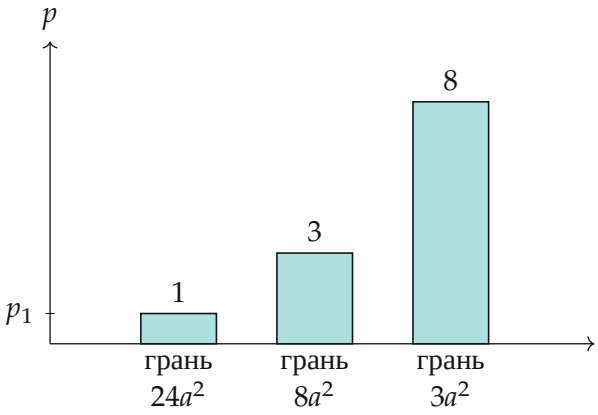
Три положения бруска: лежит на самой большой, средней и самой малой грани (высота бруска равна a, $3a$ и $8a$)

3. Давление. В каждом случае $p = \dfrac{P}{S} = \dfrac{mg}{S}$:

$$p_1 = \frac{mg}{24a^2}, \qquad p_2 = \frac{mg}{8a^2}, \qquad p_3 = \frac{mg}{3a^2}.$$

4. Отношение. Домножим все три числа на $24a^2/(mg)$:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{24} : \frac{1}{8} : \frac{1}{3} = 1 : 3 : 8.$$



Давления в трёх случаях в единицах $p_1 = mg/(24a^2)$: чем меньше опорная грань, тем больше давление

Второй способ (через высоту). Если брусок однородный с плотностью ρ и высотой h (ребро, перпендикулярное опоре), то $m = \rho Sh$, и

$$p = \frac{mg}{S} = \rho g h.$$

Площадь сокращается: давление пропорционально высоте бруска. Высоты в трёх случаях равны a, $3a$, $8a$, и $p_1 : p_2 : p_3 = a : 3a : 8a = 1 : 3 : 8$ — тот же ответ. Поэтому числа в ответе совпадают с отношением рёбер.

Обратите внимание: давление зависит от того, какой гранью лежит брусок, а сила давления — нет, она всегда равна mg. Путать эти две величины нельзя: больше площадь опоры — меньше давление при той же силе.

Проверка. Размерность: $\text{Н}/\text{м}^2 = \text{Па}$, верно. Предельный случай: у куба все рёбра равны, все грани одинаковы, и отношение $1 : 1 : 1$ — по формуле $\rho g h$ высота одна и та же. Смысл: брусок, поставленный на самую малую грань, давит на стол в 8 раз сильнее, чем лёжа на самой большой.

Ответ. $p_1 : p_2 : p_3 = 1 : 3 : 8$.