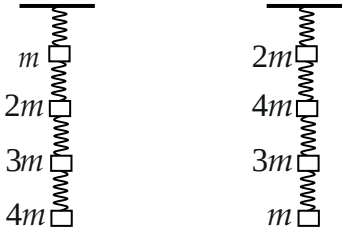
Четыре тела на пружинах

Задача 2. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 8 класс, задача 2] Четыре маленьких тела с массами m, $2m$, $3m$ и $4m$ привязаны четырьмя одинаковыми пружинами к горизонтальному потолку (см. левый рисунок). При этом нижнее тело опускается на величину Δl по сравнению с положением, когда пружины не деформированы. Затем те же тела подвешивают к потолку с помощью тех же пружин, но в другом порядке (см. правый рисунок). На сколько при этом опустилось или поднялось самое нижнее тело в цепочке тел по сравнению с положением самого нижнего тела в первоначальной цепочке тел?



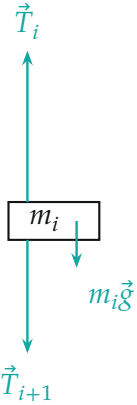
▲ **Решение. Что происходит.** Пружины висят одна под другой, и каждая держит все тела, подвешенные ниже неё: верхняя тянет вниз все четыре тела, нижняя — только последнее. Поэтому удлинение каждой пружины определяется массой тел под ней. Нижнее тело висит на конце всей цепочки, и оно опустилось на сумму удлинений всех четырёх пружин. Главная идея: найти удлинения пружин из равновесия тел и сложить их для каждого порядка.

Обозначения. k — жёсткость каждой пружины. Пружины нумеруем сверху вниз: T_i — сила упругости пружины i, Δ_i — её удлинение. Δl — опускание нижнего тела в первой цепочке, Δl_{II} — во второй.

1. Сила в пружине. Тело, подвешенное между пружинами, в равновесии: сверху его тянет вверх пружина с силой T_i, снизу вниз — следующая пружина с T_{i+1} и сила тяжести. Второй закон Ньютона при $a = 0$ в проекции на вертикаль даёт $T_i = T_{i+1} + m_i g$. Складывая по цепочке

снизу вверх, получаем: пружина i держит вес всех тел под ней,

$$T_i = g \cdot (\text{масса тел под пружиной } i), \qquad \Delta_i = \frac{T_i}{k} \quad (\text{закон Гука}).$$



Силы на тело i (длины по модулю: $T_i = T_{i+1} + m_i g$); пружины не показаны, сила в них направлена по вертикали

2. Первая цепочка (сверху вниз m, $2m$, $3m$, $4m$). Пружина 1 держит всё, $10m$; пружина 2 — $2m+3m+4m = 9m$; пружина 3 — $3m+4m = 7m$; пружина 4 — $4m$. Удлинения и опускание нижнего тела:

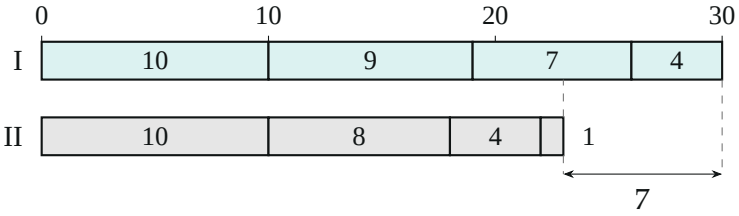
$$\Delta_1 = \frac{10mg}{k}, \quad \Delta_2 = \frac{9mg}{k}, \quad \Delta_3 = \frac{7mg}{k}, \quad \Delta_4 = \frac{4mg}{k},$$

$$\Delta l = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = \frac{30\,mg}{k}.$$

3. Вторая цепочка (сверху вниз $2m$, $4m$, $3m$, m). Пружина 1 по-прежнему держит $10m$; пружина 2 — $4m + 3m + m = 8m$; пружина 3 — $3m + m = 4m$; пружина 4 — m:

$$\Delta_1 = \frac{10mg}{k}, \quad \Delta_2 = \frac{8mg}{k}, \quad \Delta_3 = \frac{4mg}{k}, \quad \Delta_4 = \frac{mg}{k},$$

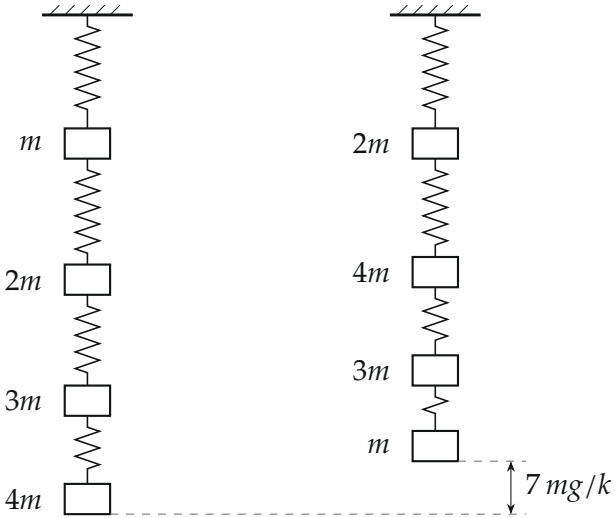
$$\Delta l_{\text{II}} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = \frac{23\,mg}{k}.$$



Удлинения пружин (сверху вниз по порядку, в единицах mg/k): в строке I (первая цепочка) $10, 9, 7, 4$, *в строке II (вторая цепочка)* $10, 8, 4, 1$; *длины сумм* 30 *и* 23; *нижнее тело второй цепочки выше на* 7 *единиц*

4. Сравнение. Опускание нижнего тела во второй цепочке меньше, чем в первой, поэтому оно поднялось:

$$\Delta x = \Delta l - \Delta l_{\text{II}} = \frac{(30 - 23)\, mg}{k} = \frac{7\, mg}{k} = \frac{7}{30}\, \Delta l.$$



Две цепочки в масштабе удлинений (длина каждой недеформированной пружины взята одинаковой, на рисунке условно): положение нижнего тела во второй цепочке выше на $7\, mg/k$

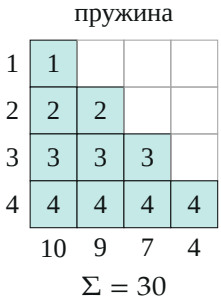
Обратите внимание: сравнивать нужно положения нижнего тела в двух подвесах, поэтому ответ — разность $\Delta l - \Delta l_{\text{II}}$, а не само Δl_{II}.

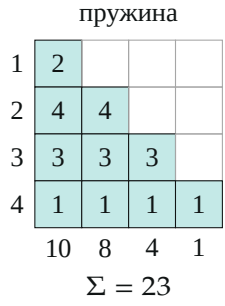
Верхняя пружина в обоих случаях держит все $10m$ и растягивается одинаково, а разница возникает на нижних пружинах, где в первой цепочке висело более тяжёлое тело.

Второй способ (вклад каждого тела). Тело, висящее на месте j сверху, растягивает все j пружин над ним: пружину j, на которой оно висит, и все выше. Значит, оно вносит в опускание нижнего тела $j\,m_j g/k$, а полное опускание равно

$$\Delta l = \frac{g}{k}\sum_j j\,m_j.$$

Для первого порядка $\sum j\,m_j = 1\cdot m + 2\cdot 2m + 3\cdot 3m + 4\cdot 4m = 30m$, для второго $1\cdot 2m + 2\cdot 4m + 3\cdot 3m + 4\cdot m = 23m$ — те же 30 и 23.





Вклады тел: строка — тело (номер места сверху слева, число в клетке — его масса в единицах m), столбец — пружина; в клетке тело растягивает пружину. Сумма столбца — нагрузка пружины ($10, 9, 7, 4$ и $10, 8, 4, 1$), сумма всех клеток — 30 и 23

Проверка. Размерность: $mg/k =$ м, верно. Если тела подвесить в том же порядке, подъём равен нулю, и формула даёт $\Delta l - \Delta l = 0$. Предельные порядки: когда самое тяжёлое тело висит внизу ($m, 2m, 3m, 4m$), сумма $\sum j\,m_j = 30$ наибольшая; когда оно вверху ($4m, 3m, 2m, m$), она наименьшая: $1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 = 20$. Наш второй порядок даёт 23 — между ними, поэтому подъём $7/30\,\Delta l$ меньше предельного $10/30\,\Delta l$. Смысл: чем выше тяжёлые тела, тем меньше растянута цепочка пружин.

Ответ. Самое нижнее тело поднялось на $\dfrac{7}{30}\Delta l$.