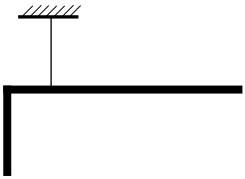
Согнутый стержень на нити

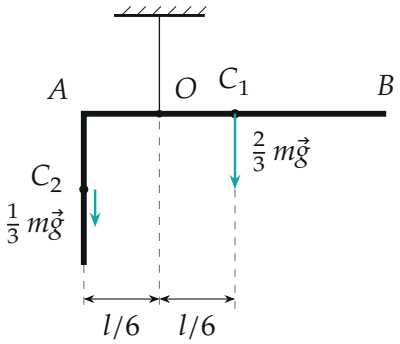
Задача 3. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 8 класс, задача 3] Однородный стержень длиной l и массой m согнули под прямым углом так, что длина согнутого участка составляет треть длины стержня. Стержень подвесили на нити к горизонтальному потолку за его середину. Какой вертикальной силой нужно подействовать на конец длинной части стержня, чтобы он находился в равновесии в том положении, которое показано на рисунке (длинная часть стержня горизонтальна, короткая вертикальна)?



▲ **Решение. Что происходит.** Нить привязана к середине стержня по длине, но у согнутого стержня тяжесть приложена не там: центр масс смещён от точки подвеса. Сила тяжести создаёт относительно точки подвеса момент и стремится повернуть стержень. Чтобы стержень остался в этом положении, на конец длинной части надо действовать вертикальной силой, момент которой равен моменту тяжести и направлен в другую сторону. Главная идея: условие равновесия моментов относительно точки подвеса; для него нужно найти положение центра масс.

Обозначения. A — место изгиба, B — конец длинной части, O — точка подвеса. Стержень однородный, поэтому масса участка пропорциональна его длине: длинная часть имеет длину $\frac{2}{3}l$ и массу $\frac{2}{3}m$, короткая — длину $\frac{1}{3}l$ и массу $\frac{1}{3}m$. Ось x направим вдоль длинной части вправо, начало отсчёта — в точке A. Точка O делит весь стержень (его длину l) пополам, то есть находится на расстоянии $l/2$ от свободного конца B и, значит, на расстоянии $2l/3 - l/2 = l/6$ от изгиба.

Почему моменты берём относительно O. Тогда момент силы натяжения нити равен нулю (она проходит через O), и неизвестное натяжение в уравнение не входит.



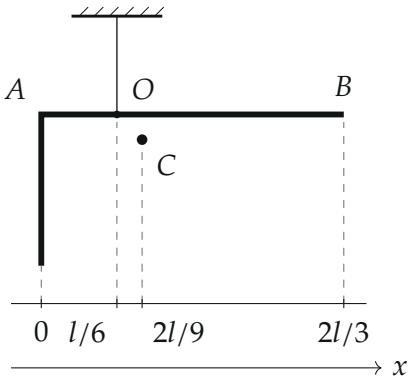
Две части стержня: длинная (центр масс C_1 в её середине, масса $\frac{2}{3}m$) и короткая (центр масс C_2 в её середине, масса $\frac{1}{3}m$); пунктиром — вертикали через O и центры масс

1. Центр масс. Центр масс длинной части C_1 лежит в её середине, $x_1 = \frac{1}{3}l$; центр масс короткой части C_2 лежит на оси y, $x_2 = 0$. Координата центра масс всего стержня равна среднему координат, взятому с весами — массами:

$$x_C = \frac{\frac{2}{3}m \cdot \frac{1}{3}l + \frac{1}{3}m \cdot 0}{m} = \frac{2}{9}\,l.$$

Точка подвеса имеет координату $x_O = \frac{1}{6}l$, поэтому центр масс правее неё на

$$d = x_C - x_O = \frac{2}{9}l - \frac{1}{6}l = \frac{1}{18}\,l.$$



Координаты на стержне (ось x от изгиба A): точка подвеса O при $l/6$, центр масс C при $2l/9$, конец B при $2l/3$; центр масс согнутого стержня лежит ниже длинной части, на расстоянии $l/18$ правее точки подвеса

2. Момент силы тяжести. Вся сила тяжести $m\vec{g}$ приложена в центре масс. Её плечо относительно O (расстояние от O до линии действия силы) равно $d = \frac{1}{18}l$, а момент

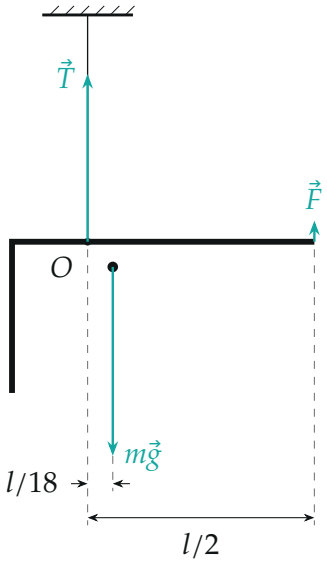
$$M_{\text{тяж}} = mg \cdot \frac{l}{18}$$

вращает стержень по часовой стрелке (центр масс правее O).

3. Условие равновесия моментов. Нужен момент против часовой стрелки — сила, направленная вверх на правом конце B. Её плечо относительно O равно $2l/3 - l/6 = l/2$. Сумма моментов относительно O равна нулю (стержень покоится):

$$F \cdot \frac{l}{2} = mg \cdot \frac{l}{18} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg}{9}.$$

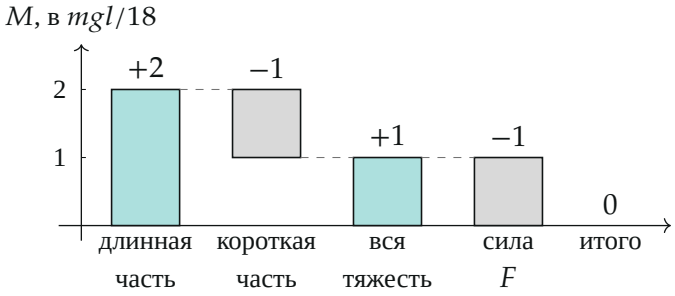
Сила направлена вертикально вверх.



Силы на стержень (длины по модулю): натяжение нити $T = \frac{8}{9}mg$, сила тяжести mg и искомая сила $F = \frac{1}{9}mg$; внизу — плечи относительно O

Обратите внимание: «середина стержня» — это середина по длине, она лежит на длинной части, на расстоянии $\frac{1}{6}l$ от изгиба. Центр масс согнутого стержня — другая точка ($\frac{2}{9}l$ от изгиба): если ошибочно считать, что нить привязана в центре масс, получится $F = 0$.

Второй способ (моменты частей по отдельности). Относительно O длинная часть (вес $\frac{2}{3}mg$, плечо $\frac{1}{6}l$, правее O) создаёт момент $\frac{1}{9}\,mgl$ по часовой стрелке; короткая часть (вес $\frac{1}{3}mg$, плечо $\frac{1}{6}l$, левее O) — момент $\frac{1}{18}\,mgl$ против часовой. Суммарный момент тяжести $\frac{1}{9} - \frac{1}{18} = \frac{1}{18}$ (в единицах mgl) по часовой стрелке, что даёт тот же результат.



Моменты относительно O в единицах $mgl/18$ (по часовой стрелке — плюс): тяжесть длинной части $+2$, короткой -1, вся тяжесть $+1$, сила F добавляет -1, в сумме 0

Проверка. Вертикальные силы на стержень: нить тянет вверх с силой T, ещё вверх действует F, вниз — mg. Равновесие даёт $T = mg - F = \frac{8}{9}\,mg$. Независимый способ: моменты относительно конца B. Нить имеет плечо $\frac{1}{2}l$, а сила тяжести — $\frac{2}{3}l - \frac{2}{9}l = \frac{4}{9}l$; момент F относительно B равен нулю, и $T \cdot \frac{l}{2} = mg \cdot \frac{4}{9}l$ даёт $T = \frac{8}{9}mg$ — то же натяжение, а значит, и $F = mg - T = \frac{1}{9}mg$. Размерность: F — сила. Предел: если бы центр масс лежал над точкой подвеса, было бы $F = 0$. Смысл: сила мала, потому что центр масс почти над точкой подвеса (смещён всего на $l/18$).

Ответ. $F = \dfrac{mg}{9}$, направлена вертикально вверх.