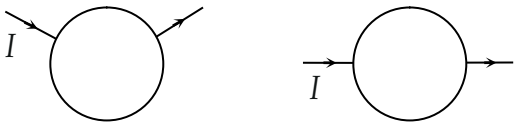
Проволочное кольцо с контактами

Задача 2. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 9 класс, задача 2] Проволочное кольцо включили в электрическую цепь так, что контакты делят длину кольца в отношении 2:1 (см. левый рисунок). При этом в кольце выделяется мощность $P_1 = 112$ Вт. Какая мощность P_2 будет выделяться в кольце, если контакты разместить по его диаметру, а в цепи будет течь такой же ток?



▲ **Решение. Что происходит.** Два контакта разбивают кольцо на две дуги, и ток от одного контакта к другому идёт по обеим сразу: дуги соединены параллельно. Тепло выделяется в проводе кольца, а ток, втекающий в кольцо, в обоих опытах один и тот же. Главная идея: при одинаковом токе мощность пропорциональна сопротивлению кольца между контактами, поэтому остаётся найти сопротивление кольца в каждом включении.

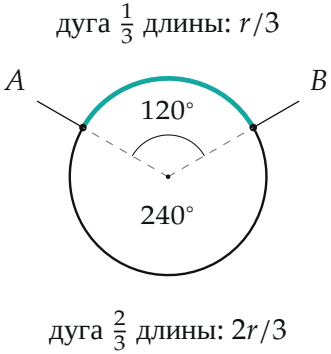
Обозначения. r — сопротивление всего провода кольца, I — ток, втекающий в кольцо. Провод однородный, поэтому сопротивление дуги пропорционально её длине: дуга в долю x длины кольца имеет сопротивление xr. R_1, R_2 — сопротивления кольца между контактами в первом и втором включениях.

1. Мощность через сопротивление. Закон Джоуля — Ленца для участка цепи, которым является кольцо между контактами: $P = I^2R$. Ток в обоих включениях одинаков, поэтому

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2}{R_1}.$$

2. Дуги. Первое включение: контакты делят кольцо в отношении 2:1, то есть на дуги в $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ длины; центральные углы 120° и 240°. Сопротив-

ления дуг: $r/3$ и $2r/3$. Второе включение: контакты на концах диаметра, дуги равны, по $r/2$.



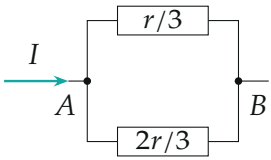
Первое включение: короткая дуга (бирюзовая) занимает $\frac{1}{3}$ кольца, остальные $\frac{2}{3}$ — длинная

3. Сопротивление кольца. Дуги соединены параллельно: проводимости складываются, $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$, то есть $R = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$. Здесь $r_1 + r_2 = r$ в обоих случаях. Первое включение, $r_1 = \frac{r}{3}$, $r_2 = \frac{2r}{3}$:

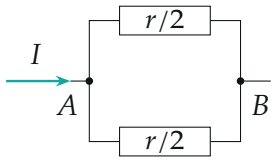
$$R_1 = \frac{\frac{r}{3} \cdot \frac{2r}{3}}{r} = \frac{2}{9} r.$$

Второе включение, $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$:

$$R_2 = \frac{\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{4} r.$$



$R_1 = \frac{2}{9} r$



$R_2 = \frac{1}{4} r$

Эквивалентные схемы: две дуги — два параллельных резистора между точками A и B (слева первое включение, справа второе)

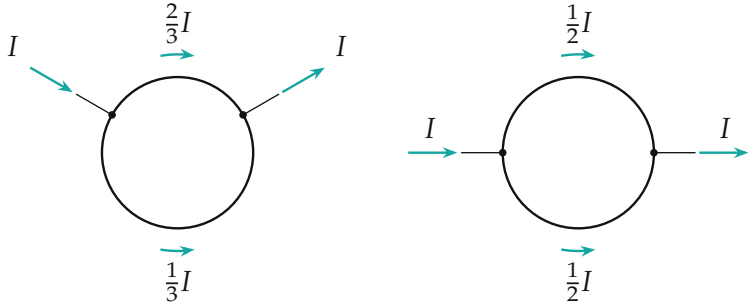
4. Мощность. Отсюда

$$P_2 = P_1 \frac{R_2}{R_1} = 112\ \text{Вт} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{9}} = 112\ \text{Вт} \cdot \frac{9}{8} = 126\ \text{Вт}.$$

Второй способ (через токи в дугах). В параллельных ветвях токи обратно пропорциональны сопротивлениям: в первом включении по короткой дуге $r/3$ течёт $\frac{2}{3}I$, по длинной $2r/3$ течёт $\frac{1}{3}I$ (сумма равна I). Мощность — сумма мощностей в дугах:

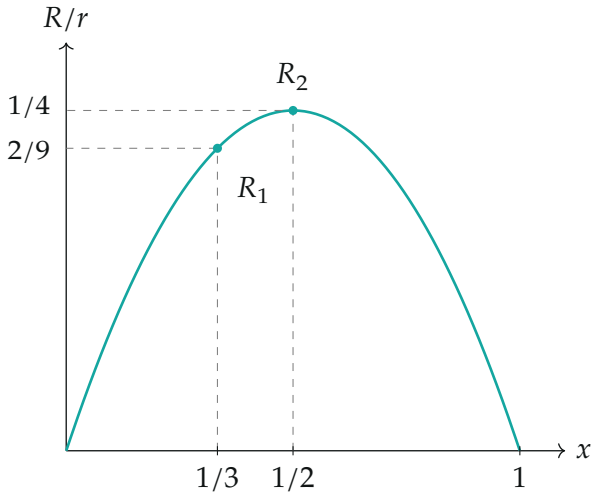
$$P_1 = \left(\frac{2I}{3}\right)^2 \frac{r}{3} + \left(\frac{I}{3}\right)^2 \frac{2r}{3} = \frac{2}{9} I^2 r, \qquad P_2 = 2\left(\frac{I}{2}\right)^2 \frac{r}{2} = \frac{1}{4} I^2 r.$$

Отсюда $I^2 r = \frac{9}{2} P_1 = 504$ Вт и $P_2 = \frac{1}{4} \cdot 504$ Вт $= 126$ Вт — то же самое.



Токи в дугах при одном и том же токе I, втекающем в кольцо: слева первое включение, справа второе

Обратите внимание: «такой же ток» в условии относится к току, втекающему в кольцо, а не к токам в дугах — в первом включении они разные ($\frac{2}{3}I$ и $\frac{1}{3}I$). Поэтому сравнивать мощности как I^2R можно только через ток в подводящих проводах, где он одинаков.



Сопротивление кольца $R = r\,x(1-x)$ в зависимости от доли x длины кольца между контактами (R_1 — первое включение, $x = \frac{1}{3}$; R_2 — второе, $x = \frac{1}{2}$); наибольшее значение $r/4$ достигается при контактах по диаметру

Проверка. Размерность: $P = I^2R$, $[\text{А}^2 \cdot \text{Ом}] = \text{Вт}$. Предел: если контакты сближать ($x \to 0$), короткая дуга почти закорачивает кольцо, $R \to 0$ и мощность при том же токе стремится к нулю; наибольшее сопротивление $r/4$ получается при диаметральных контактах (график), поэтому $P_2 > P_1$: $126 > 112$. Смысл: при равных дугах ни одна из них не «закорачивает» другую, и сопротивление кольца наибольшее.

Ответ. $P_2 = \dfrac{9}{8}P_1 = 126$ Вт.