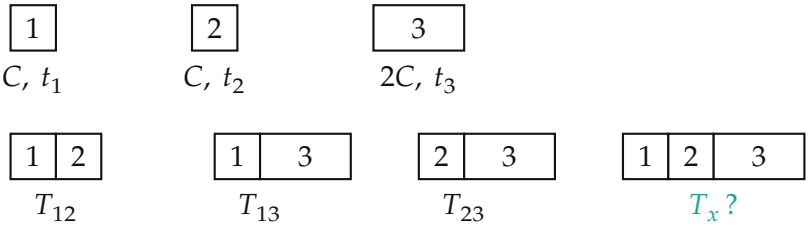
Три тела разной теплоёмкости

Задача 4. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 9 класс, задача 4] Имеется три тела с разными температурами. Теплоёмкости первого и второго тела одинаковы, у третьего — вдвое больше. Если в тепловой контакт привести первое и второе тело, установится температура T_{12}. Если в тепловой контакт привести первое и третье тело (с первоначальными температурами), установится температура T_{13}. Если в тепловой контакт привести второе и третье тело (с первоначальными температурами), установится температура T_{23}. Какая установится температура, если привести в тепловой контакт все три тела? Потерь тепла нет.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Тела обмениваются теплом только друг с другом: сколько тепла отдают более горячие, столько получают более холодные. Из этого баланса следует, что итоговая температура — среднее начальных температур, взятых с весами, равными теплоёмкостям. Начальных температур три, и все они неизвестны, но искать их по отдельности необязательно: итоговую температуру можно сразу выразить через три данные.

Обозначения. C — теплоёмкость первого и второго тела, $2C$ — третьего; t_1, t_2, t_3 — их начальные температуры; T_x — искомая температура всех трёх тел. Теплоёмкости считаем постоянными, фазовых переходов нет.



Три тела (ширина прямоугольника — теплоёмкость) и четыре контакта: три пары с известными итоговыми температурами и все три тела вместе

1. Уравнение теплового баланса. Потерь нет, поэтому количество теплоты, полученное одними телами, равно количеству теплоты, отданному другими: сумма $C_i(T - t_i)$ по всем телам равна нулю. Отсюда

$(\sum C_i)\,T = \sum C_i t_i$. Запишем это для каждого контакта:

$$\begin{aligned}
&\text{тела } 1,2: && 2T_{12} = t_1 + t_2, && (1)\\
&\text{тела } 1,3: && 3T_{13} = t_1 + 2t_3, && (2)\\
&\text{тела } 2,3: && 3T_{23} = t_2 + 2t_3, && (3)\\
&\text{тела } 1,2,3: && 4T_x = t_1 + t_2 + 2t_3. && (4)
\end{aligned}$$

Здесь T_{ij} известны, а t_1, t_2, t_3 и T_x — нет: четыре уравнения, четыре неизвестных.

2. Исключаем начальные температуры. Не будем искать каждую t_i: подберём такие числа a, b, c, чтобы $a\cdot(1) + b\cdot(2) + c\cdot(3)$ дало правую часть (4), то есть $t_1 + t_2 + 2t_3$. Сравним коэффициенты при t_1, t_2, t_3:

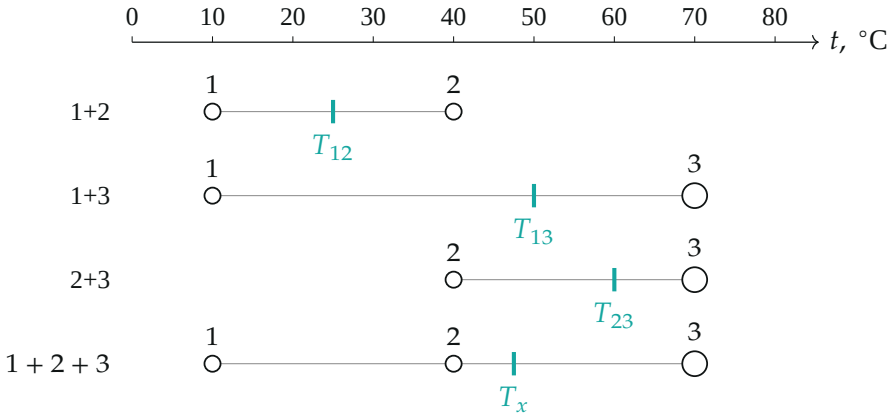
$$a + b = 1, \qquad a + c = 1, \qquad 2b + 2c = 2 \quad\Rightarrow\quad a = b = c = \frac{1}{2}.$$

Складываем уравнения (1)–(3) с весом $\frac{1}{2}$ и сравниваем с (4):

$$4T_x = \frac{1}{2}\cdot 2T_{12} + \frac{1}{2}\cdot 3T_{13} + \frac{1}{2}\cdot 3T_{23}.$$

Отсюда

$$T_x = \frac{1}{4}T_{12} + \frac{3}{8}(T_{13} + T_{23}).$$



Пример для рисунка: $t_1 = 10\,^\circ C$, $t_2 = 40\,^\circ C$, $t_3 = 70\,^\circ C$. Итоговая температура контакта — «центр тяжести» начальных, где вес тела равен его теплоёмкости (кружок побольше — третье тело): $T_{12} = 25$, $T_{13} = 50$, $T_{23} = 60$, $T_x = 47{,}5\,^\circ C$

3. Числовая проверка формулы. Для температур рисунка $T_{12} = 25$, $T_{13} = 50$, $T_{23} = 60\,^\circ$C формула даёт

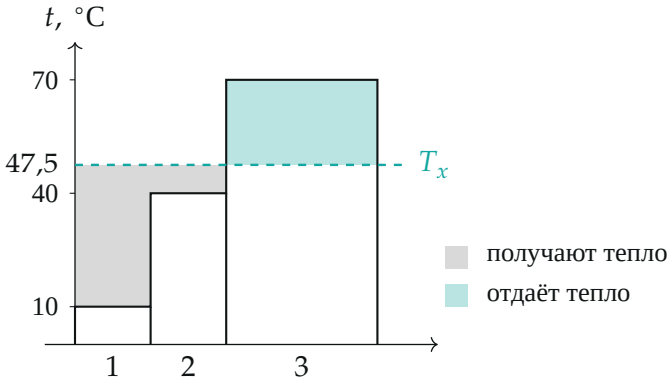
$$T_x = \frac{25}{4} + \frac{3}{8}\,(50 + 60) = 6{,}25 + 41{,}25 = 47{,}5\,^\circ\text{C},$$

а прямой расчёт по (4) даёт $T_x = \dfrac{10 + 40 + 2 \cdot 70}{4} = 47{,}5\,^\circ$C — совпало.

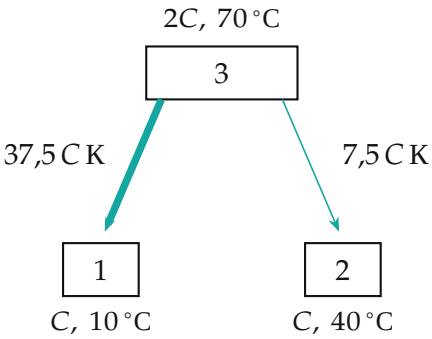
Второй способ (найти начальные температуры). Из (1)–(3) последовательно: $t_1 + t_2 = 2T_{12}$; вычтем (3) из (2): $t_1 - t_2 = 3T_{13} - 3T_{23}$; тогда

$$t_1 = T_{12} + \tfrac{3}{2}(T_{13} - T_{23}), \qquad t_2 = T_{12} + \tfrac{3}{2}(T_{23} - T_{13}),$$
$$t_3 = \tfrac{3}{4}(T_{13} + T_{23}) - \tfrac{1}{2}T_{12}.$$

Подставив в (4), $T_x = \frac{1}{4}(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}t_3 = \frac{1}{2}T_{12} + \frac{3}{8}(T_{13} + T_{23}) - \frac{1}{4}T_{12}$, получаем тот же ответ.



Тепловой баланс как равенство площадей: ширина столбца — теплоёмкость, высота — начальная температура. Площадь выше T_x (третье тело отдаёт) равна площади ниже T_x (первое и второе получают): $45 = 37{,}5 + 7{,}5$ в единицах $C \cdot K$



Теплообмен трёх тел в примере: тело 3 отдаёт 45 C K, тела 1 и 2 получают 37,5 C K и 7,5 C K (толщина стрелки пропорциональна теплоте), итоговая температура всех трёх 47,5 °C

Проверка. Коэффициенты в ответе в сумме дают единицу: $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=1$. Значит, если бы все три температуры T_{12}, T_{13}, T_{23} были равны θ, то и $T_x=\theta$, как и должно быть. Второй способ дал тот же результат, а пример с числами подтвердил формулу: тело 3 отдаёт $2C\cdot 22{,}5 = 45\,C$ K, а тела 1 и 2 получают $37{,}5\,C$ K и $7{,}5\,C$ K, вместе тоже $45\,C$ K. Смысл: итоговая температура лежит между наименьшей и наибольшей из начальных, ближе к температуре тела с большей теплоёмкостью.

Ответ. $T_x=\dfrac{1}{4}\,T_{12}+\dfrac{3}{8}\,(T_{13}+T_{23})$.