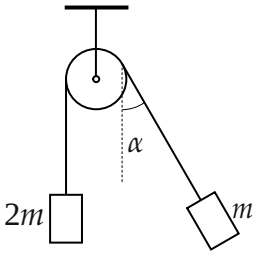
Грузы 2m и m на нити через блок, один отклонён

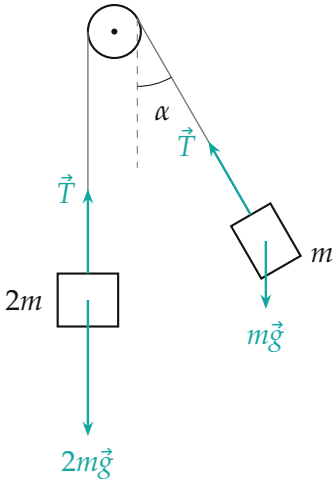
Задача 5. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 9 класс, задача 5] Два тела с массами $2m$ и m привязали к концам невесомой и нерастяжимой нити, которую перебросили через невесомый блок. Удерживая тела так, что нить натянута, тело с массой m отклонили на угол α от вертикали (см. рисунок). Затем тела отпускают. Найти ускорения тел сразу после этого.



▲ **Решение. Что происходит.** Тело $2m$ тяжелее и начинает опускаться, а нить тянет тело m к блоку. Скорости в момент отпускания равны нулю, поэтому ускорение тела m раскладывается на две части. *Вдоль нити* оно связано с телом $2m$: нить нерастяжима, и сколько нити уходит с одной стороны блока, столько прибавляется с другой. *Поперёк нити* нить на тело не действует (она тянет только вдоль себя), и там работает одна сила тяжести. Главная идея: нерастяжимость нити даёт равенство проекций ускорений на нить, а силы мы раскладываем по направлениям вдоль нити и поперёк неё.

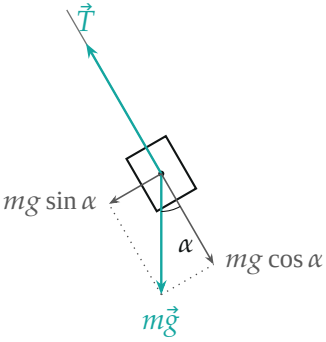
Обозначения. T — сила натяжения нити; блок невесомый и без трения, поэтому по обе стороны от него T одна и та же. a — модуль ускорения тела $2m$ (оно направлено вниз), a_ξ и a_η — проекции ускорения тела m на ось ξ вдоль нити к блоку и на ось η перпендикулярно нити. Начальные скорости нулевые, размерами тел и блока пренебрегаем.

1. Силы. На тело $2m$ действуют сила тяжести $2m\vec{g}$ вниз и сила натяжения $\vec{T}$ вверх. На тело m — сила тяжести $m\vec{g}$ вниз и сила натяжения $\vec{T}$ вдоль нити к блоку.



Силы на тела сразу после отпускания (длины стрелок по модулю: $T = \frac{2}{3}(1+\cos\alpha)\,mg \approx 1{,}24\,mg$ при $\alpha = 30°$)

Разложим силу тяжести тела m по осям: так как нить отклонена от вертикали на α, вдоль нити от блока направлена составляющая $mg\cos\alpha$, а поперёк нити — составляющая $mg\sin\alpha$.

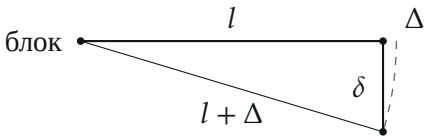


Тело m отдельно: сила тяжести раскладывается на составляющие вдоль нити ($mg\cos\alpha$, от блока) и поперёк неё ($mg\sin\alpha$, к вертикали через блок); натяжение $\vec{T}$ — вдоль нити к блоку

2. Нерастяжимость нити. Пусть за малое время τ после отпускания тело $2m$ опустилось на $a\tau^2/2$: на столько нить ушла с левой стороны

блока, значит, на столько же её стало меньше с правой. Тело m за это время сместилось вдоль нити на $a_\xi \tau^2/2$ и поперёк на $a_\eta \tau^2/2$. Поперечное смещение δ меняет расстояние до блока на $\sqrt{l^2+\delta^2} - l \approx \delta^2/(2l)$, то есть на величину порядка τ^4: рядом с членами порядка τ^2 она ничтожна. Остаётся смещение вдоль нити, и

$$a_\xi = a.$$



Тело сдвинулось поперёк нити на δ: расстояние до блока выросло только на $\Delta \approx \delta^2/(2l)$ (на рисунке δ сильно преувеличено)

Обратите внимание: равенство проекций ускорений на нить верно только в момент, когда скорости равны нулю. Когда тело m уже движется со скоростью $v_\perp$ поперёк нити, длина участка нити от блока до него меняется ещё и из-за поворота, и в связь ускорений входит слагаемое $v_\perp^2/l$. Здесь $v_\perp = 0$, и оно пропадает.

3. Второй закон Ньютона вдоль нити. Для тела $2m$ в проекции на вертикаль вниз и для тела m в проекции на ось ξ (к блоку; сила тяжести имеет здесь проекцию $-mg\cos\alpha$):

$$2m\,a = 2mg - T, \qquad m\,a = T - mg\cos\alpha.$$

Складываем уравнения: натяжение, как внутренняя сила пары, уходит:

$$3m\,a = 2mg - mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g\,(2-\cos\alpha)}{3}.$$

Из первого уравнения $T = 2m(g-a) = \frac{2}{3}mg\,(1+\cos\alpha) > 0$: нить действительно натянута.

4. Поперёк нити. Нить в этом направлении не действует, из сил оста-

ётся только составляющая тяжести $mg\sin\alpha$:

$$m a_\eta = mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a_\eta = g\sin\alpha.$$

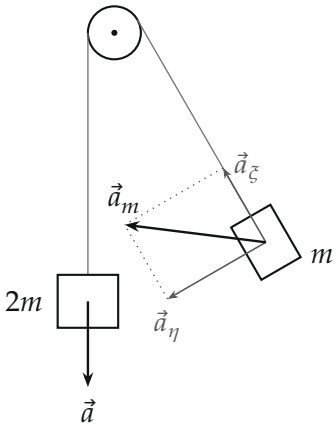
5. Ускорение тела m. Две составляющие перпендикулярны, поэтому

$$a_m = \sqrt{a_\xi^2 + a_\eta^2} = \frac{g}{3}\sqrt{9\sin^2\alpha + (2-\cos\alpha)^2} = \frac{g}{3}\sqrt{13 - 4\cos\alpha - 8\cos^2\alpha}.$$

Направление: вектор $\vec{a}_m$ составляет с нитью угол β,

$$\tan\beta = \frac{a_\eta}{a_\xi} = \frac{3\sin\alpha}{2-\cos\alpha}.$$

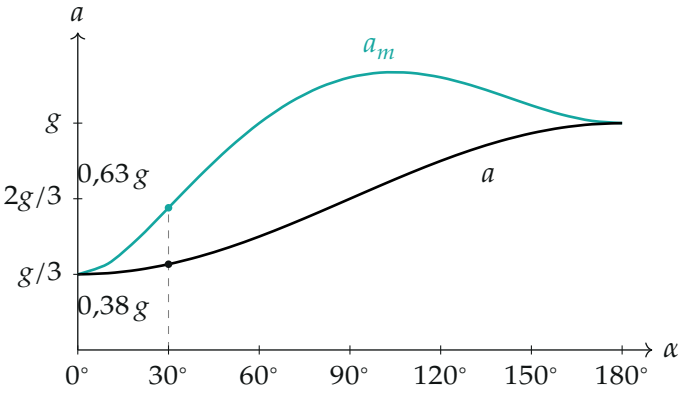
Для $\alpha = 30°$ получаем $a_{2m} \approx 0{,}38\,g$, $a_m \approx 0{,}63\,g$ и $\beta \approx 53°$; тело m уходит влево и чуть вверх.



Ускорения сразу после отпускания ($\alpha = 30°$, длины по модулю): тело $2m$ идёт вниз с ускорением $\vec{a}$; ускорение тела m — сумма составляющей вдоль нити $\vec{a}_\xi$ (по модулю равной a) и составляющей $\vec{a}_\eta$ поперёк нити

Проверка. Размерность: везде g умножается на безразмерное. Предел $\alpha = 0$: тела висят вертикально, получаем машину Атвуда: $a = a_m = g\,(2m - m)/(2m + m) = g/3$, как и по формулам. Предел $\alpha = 180°$:

$T = 0$ и оба тела свободно падают, $a = a_m = g$, и формулы это дают. Второй способ для a: рассмотрим систему двух тел; натяжение — её внутренняя сила. Пока тела проходят вдоль нити одинаковый путь s (они стартуют из покоя), работа внешних сил $(2mg - mg\cos\alpha)\,s$ равна кинетической энергии $\frac{1}{2}\cdot 3m\,v^2 = 3m\,a\,s$ (так как $v^2 = 2as$), то есть $3ma = 2mg - mg\cos\alpha$ — то же уравнение. Смысл: чем сильнее отклонено тело m, тем меньше его вес тянет против тела $2m$ вдоль нити, поэтому a растёт с α.



Ускорения тел сразу после отпускания в единицах g в зависимости от угла α: чёрная линия — a (тело $2m$), бирюзовая — a_m; при $\alpha = 0$ обе равны $g/3$ (машина Атвуда), при $\alpha = 180°$ обе равны g

Ответ. Тело $2m$: $a_{2m} = \dfrac{g\,(2-\cos\alpha)}{3}$, направлено вниз; тело m: $a_m = \dfrac{g}{3}\sqrt{9\sin^2\alpha + (2-\cos\alpha)^2}$.