Три источника и четыре вольтметра

Задача 1. [Росатом 2025/26, 10 класс, задача 1] Из трёх идеальных источников ЭДС ε, 2ε и 3ε и четырёх одинаковых неидеальных вольтметров собрали электрическую цепь, схема которой приведена на рисунке. Найти показания всех приборов. Значения ЭДС источников показаны на рисунке. $\varepsilon = 12$ В.

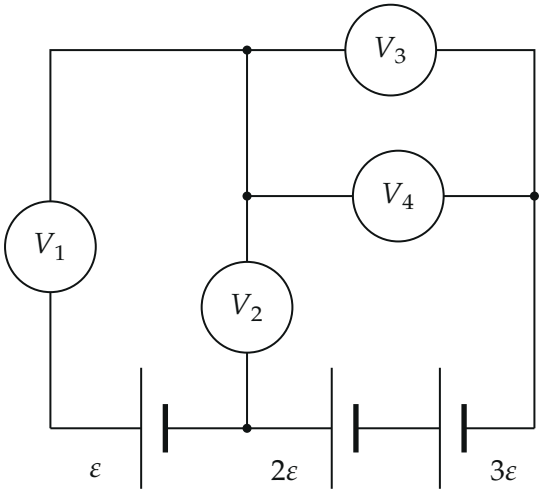
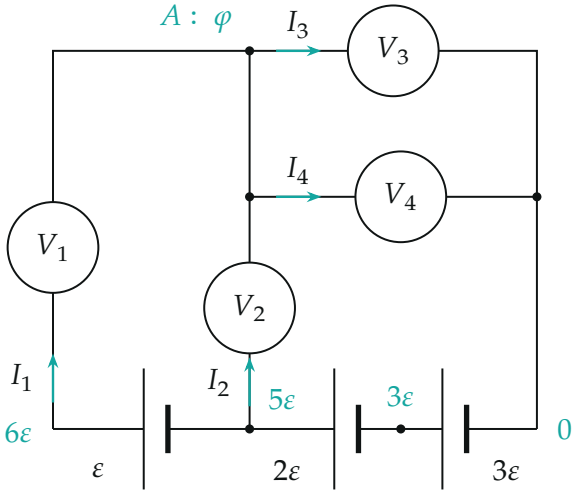


Схема из условия

▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметры здесь неидеальные: у каждого есть одно и то же конечное сопротивление r, и через него течёт ток, а показание прибора равно напряжению на нём, то есть $U = Ir$. Источники идеальные, поэтому разность потенциалов между клеммами источника всегда равна его ЭДС, какой бы ток через него ни шёл. Так что потенциалы узлов на нижней ветке известны сразу, а неизвестен лишь потенциал верхнего узла, куда сходятся все четыре вольтметра. Его найдём из условия, что заряд в узле не накапливается.

Обозначения. Потенциал правого провода (там сходятся V_3, V_4 и минус источника 3ε) примем за нуль. Остальные узлы нижней ветки обозначим P (левый нижний угол), D (узел под V_2) и E (между источниками 2ε и 3ε), а общий узел, в котором сходятся верхние концы всех четырёх вольтметров, — A. Сопротивление вольтметра r, показание V_k — U_k.



Потенциалы узлов относительно правого провода и направления токов через вольтметры: φ — потенциал узла A

1. Потенциалы узлов на нижней ветке. У условного обозначения источника длинная пластина — плюс, короткая толстая — минус; все три источника включены одинаково, плюсом влево. Разность потенциалов на клеммах идеального источника равна его ЭДС. Идём по нижней ветке справа налево, каждый раз поднимаясь на ЭДС очередного источника:

$$\varphi_E = 3\varepsilon, \qquad \varphi_D = \varphi_E + 2\varepsilon = 5\varepsilon, \qquad \varphi_P = \varphi_D + \varepsilon = 6\varepsilon.$$

2. Закон Ома для вольтметров. Через вольтметр между узлами с потенциалами φ_1 и φ_2 течёт ток $I = (\varphi_1 - \varphi_2)/r$ от большего потенциала к меньшему. Пусть потенциал узла A равен φ. Предположим, что токи в V_1 и V_2 текут к узлу A, а в V_3 и V_4 — от него (так как φ должен оказаться между 0 и 5ε; проверим это в конце):

$$I_1 = \frac{6\varepsilon - \varphi}{r}, \quad I_2 = \frac{5\varepsilon - \varphi}{r}, \quad I_3 = I_4 = \frac{\varphi - 0}{r}.$$

3. Сохранение заряда в узле A**.** Проводники узла A не накапливают заряд, а значит, сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов,

вытекающих из него (первое правило Кирхгофа):

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 \;\Rightarrow\; (6\varepsilon - \varphi) + (5\varepsilon - \varphi) = 2\varphi \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{11}{4}\,\varepsilon.$$

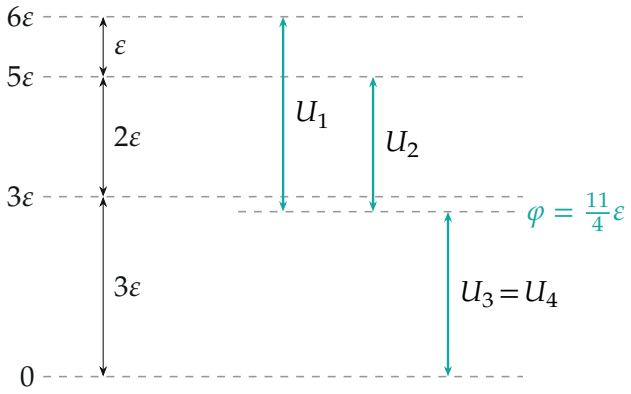
Сопротивление r сократилось: ни его величина, ни то, что оно вообще конечное, нам не нужны, важно лишь, что все четыре вольтметра одинаковы.

Обратите внимание: вольтметры здесь — не измерители поверх цепи, а сама цепь. Ток через них не мал и не пренебрежим, поэтому ни один из приборов не показывает ЭДС «своего» источника.

4. Показания приборов. Показание вольтметра — модуль разности потенциалов на его выводах:

$$U_1 = 6\varepsilon - \varphi = \frac{13}{4}\,\varepsilon, \qquad U_2 = 5\varepsilon - \varphi = \frac{9}{4}\,\varepsilon, \qquad U_3 = U_4 = \varphi = \frac{11}{4}\,\varepsilon.$$

При $\varepsilon = 12$ В это 39 В, 27 В и 33 В. Потенциал $\varphi = \frac{11}{4}\varepsilon$ действительно лежит между 0 и 5ε, так что направления токов в п. 2 выбраны верно.



Лесенка потенциалов: три источника поднимают потенциал от 0 до 6ε, а вольтметры «спускают» его к общему уровню φ

Проверка. Размерность: все ответы — доли ЭДС, то есть вольты. Контуры, не использованные при решении, тоже сходятся (в единицах ε): внешний контур через V_1, V_3 и все три источника, контур через V_2, V_4

и два правых источника, контур через V_1, V_2 и источник ε, а также баланс токов в узле:

$$\frac{13}{4}+\frac{11}{4}=6,\qquad \frac{9}{4}+\frac{11}{4}=5,\qquad \frac{13}{4}-\frac{9}{4}=1,\qquad \frac{13}{4}+\frac{9}{4}=2\cdot\frac{11}{4}.$$

Смысл результата: потенциал узла, к которому одинаковые сопротивления подходят из точек с потенциалами 6ε, 5ε, 0, 0, равен их среднему арифметическому:

$$\varphi=\frac{6\varepsilon+5\varepsilon+0+0}{4}=\frac{11}{4}\,\varepsilon.$$

Ответ. $U_1=\dfrac{13}{4}\varepsilon=39$ В; $U_2=\dfrac{9}{4}\varepsilon=27$ В; $U_3=U_4=\dfrac{11}{4}\varepsilon=33$ В.