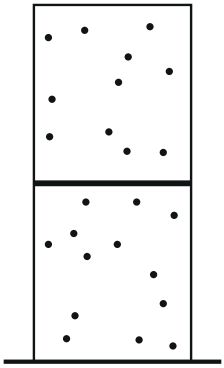
Массивная перегородка в цилиндре с газом

Задача 1. [Росатом 2025/26, 10 класс, задача 2] Имеется сосуд в форме цилиндра с радиусом основания r и высотой $8r$, расположен вертикально на горизонтальной поверхности. Сосуд герметично разделён на две половины массивной перегородкой, которую вначале удерживают посередине сосуда, а в каждой половине сосуда находится идеальный одноатомный газ под давлением p. В некоторый момент времени перегородку отпускают, и она после совершения нескольких колебаний устанавливается на расстоянии h ниже её начального положения. Найти массу перегородки.

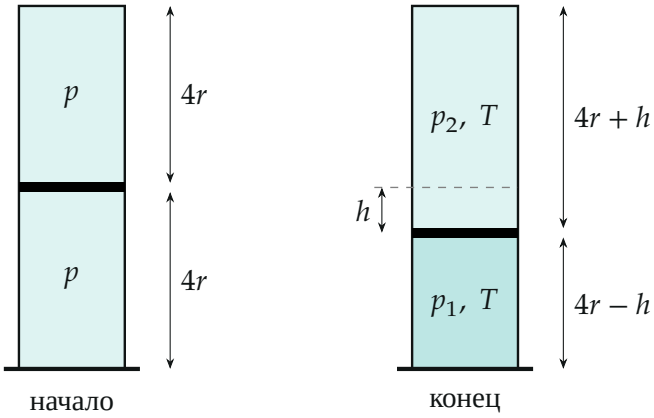


▲ **Решение.** **Что происходит.** После того как перегородку отпустили, она опускается, колеблется вверх и вниз, а колебания затухают: механическая энергия перегородки переходит в тепло и идёт на нагрев газов. В конце перегородка покоится на h ниже начального положения. Для ответа достаточно двух вещей: условия равновесия перегородки в конце и закона сохранения энергии системы «газ + перегородка» между начальным и конечным состояниями. Ход самих колебаний не нужен.

Условие об этом молчит, но, как и в решении организаторов, сосуд считаем теплоизолированным, а перегородку — теплопроводной: тепло наружу не уходит, а температуры газов над и под перегородкой одинаковы.

Обозначения. $S = \pi r^2$ — площадь сечения сосуда; p_1 и p_2 — давления газа под перегородкой и над ней после установления равновесия;

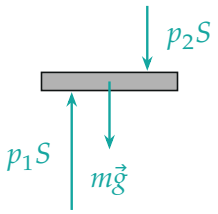
T_0 и T — общая температура газов в начале и в конце; ν — количество вещества газа в каждой половине (поскольку температуры газов в начале одинаковы, а p и V равны, количества вещества равны); перегородку считаем бесконечно тонкой.



Начало (перегородку удерживают посередине) и конец (после затухания колебаний); серый пунктир — начальный уровень перегородки

1. Равновесие перегородки в конце. Перегородка покоится, поэтому сумма сил на неё равна нулю. Второй закон Ньютона для перегородки в проекции на вертикальную ось вверх: снизу давит газ с силой p_1S, сверху — газ с силой p_2S и притягивает Земля с силой mg:

$$p_1S - p_2S - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad (p_1 - p_2)\,S = mg.$$



Силы на перегородку в конце: $p_1S = p_2S + mg$

2. Температуры и количества газа одинаковы. Закон Клапейрона — Менделеева для газа под перегородкой и над ней в конечном состоянии (объёмы $(4r-h)S$ и $(4r+h)S$):

$$p_1(4r-h)S=\nu RT,\quad p_2(4r+h)S=\nu RT\ \Rightarrow\ p_1(4r-h)=p_2(4r+h).$$

Отсюда $p_2=p_1\dfrac{4r-h}{4r+h}$, и первое уравнение даёт

$$p_1\,\frac{2h}{4r+h}\,S=mg\quad\Rightarrow\quad p_1=\frac{mg\,(4r+h)}{2hS}.$$

3. Закон сохранения энергии. Система «газ + перегородка» теплоизолирована, стенки сосуда неподвижны и работы не совершают, перегородка в начале и в конце неподвижна. Значит, потеря потенциальной энергии перегородки равна приросту внутренней энергии обоих газов: $mgh=U-U_0$. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа $U=\frac{3}{2}\nu RT=\frac{3}{2}pV$. В начале

$$U_0=2\cdot\frac{3}{2}p\cdot 4rS=12\,prS,$$

в конце, с учётом $p_1(4r-h)=p_2(4r+h)$,

$$U=\frac{3}{2}\left[p_1(4r-h)+p_2(4r+h)\right]S=3\,p_1(4r-h)\,S.$$

Подставим p_1 из п. 2:

$$12\,prS+mgh=3\,(4r-h)\,S\cdot\frac{mg\,(4r+h)}{2hS}=\frac{3\,mg\,(16r^2-h^2)}{2h}.$$

Обратите внимание: энергию нельзя найти, считая каждый газ изотермическим или адиабатным: пока перегородка колеблется, давление и температура газов не равновесны, а процесс необратим. Верны только начальное и конечное состояния и сохранение полной энергии.

4. Масса. Перенесём mgh вправо и вынесем mg:

$$12\,prS = mg\left[\frac{3(16r^2-h^2)}{2h} - h\right] = mg\,\frac{48r^2-5h^2}{2h},$$

$$m = \frac{24\,prSh}{g\,(48r^2-5h^2)} = \frac{24\pi\,p\,r^3h}{g\,(48r^2-5h^2)}.$$

Проверка. Размерность: $p\,r\,h/g$ дают $\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2\cdot\text{м}^{-1} = \text{Н}\cdot\text{с}^2/\text{м} =$ кг, множитель $\pi r^2/r^2$ безразмерный.

Предел малого смещения: при $h \ll r$ в ответе $48r^2 - 5h^2 \approx 48r^2$, и $m \approx \frac{\pi prh}{2g}$. Независимо: у лёгкой перегородки температура почти не меняется (поправка второго порядка по h), поэтому $p_1 \approx p(1+\frac{h}{4r})$, $p_2 \approx p(1-\frac{h}{4r})$, и условие равновесия даёт

$$mg = (p_1 - p_2)\,S = \frac{p\,h}{2r}\,\pi r^2 \quad\Rightarrow\quad m = \frac{\pi prh}{2g},$$

тот же результат. Знак нагрева: из п. 2 и п. 4

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p_1(4r-h)}{4pr} = \frac{3(16r^2-h^2)}{48r^2-5h^2} = \frac{48r^2-3h^2}{48r^2-5h^2} > 1,$$

газ действительно нагрелся.

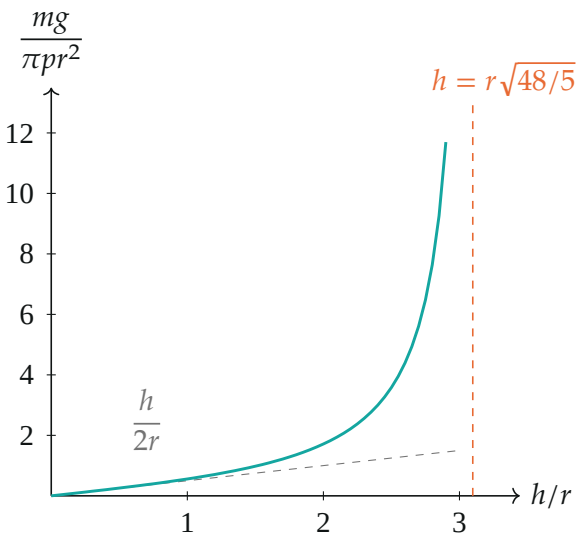


График $m(h)$ в безразмерном виде: бирюзовая кривая — ответ, серый пунктир — линейный закон малых смещений, морковный пунктир — предельное смещение

Смысл результата: при малом смещении масса растёт пропорционально h, затем всё быстрее. Смещение не может превзойти $h = r\sqrt{48/5} \approx 3{,}1\,r$, как бы тяжела ни была перегородка: при $h \to r\sqrt{48/5}$ масса и температура газа растут неограниченно, вся энергия падения уходит в нагрев сжатого газа.

Ответ. $m = \dfrac{24\pi\, p\, r^3 h}{g\left(48r^2 - 5h^2\right)}$.