Человек тянет сани по льду

Задача 1. [Росатом 2025/26, 10 класс, задача 3] Человек массой $m = 60$ кг стоит на льду и пытается с помощью верёвки сдвинуть тяжёлые сани массой $M = 100$ кг. Коэффициент трения саней о лёд $\mu_1 = 0{,}2$, человека о лёд $\mu_2 = 0{,}3$. Сможет ли человек сдвинуть сани, и если да, то под каким углом к горизонту он должен их тянуть? Считать, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Сани сдвинутся, когда горизонтальная составляющая натяжения верёвки превзойдёт максимальную силу трения покоя о лёд под санями. Но верёвка тянет и человека, и он удержится на месте, только если та же горизонтальная составляющая не больше максимальной силы трения покоя под его ногами. Наклон верёвки меняет обе силы нормальной реакции: сани она немного приподнимает и тем облегчает трение, человека — прижимает ко льду и тем укрепляет его опору. Поэтому всё решается подбором угла: нужно найти, при каких α найдётся натяжение, годное и для саней, и для человека.

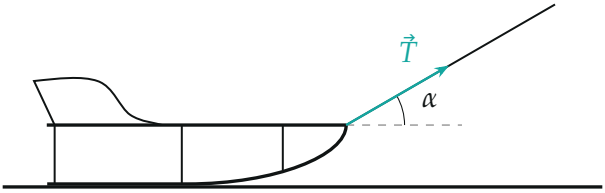


Рисунок из решения организаторов: верёвка тянет сани с силой $\vec{T}$ под углом α к горизонту

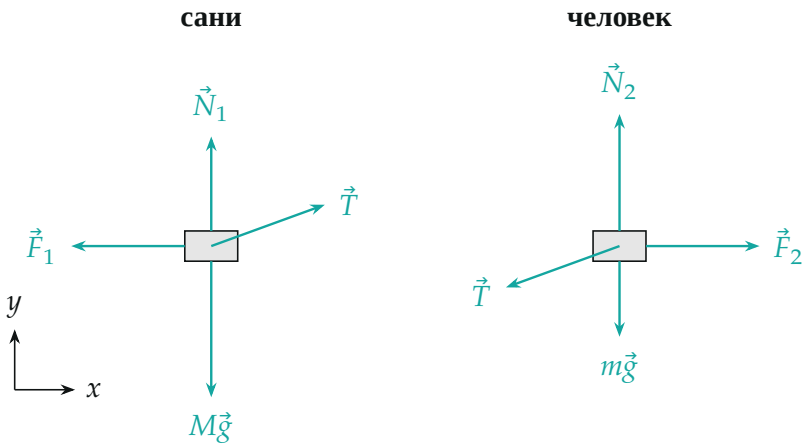
Обозначения. T — сила натяжения верёвки, α — угол верёвки с горизонтом. Верёвку считаем лёгкой и натянутой по прямой, поэтому T на обоих её концах одинакова и угол α у обоих концов один и тот же. N_1, N_2 — силы нормальной реакции льда на сани и на человека, F_1, F_2 — силы трения о лёд. Коэффициенты трения считаем одинаковыми для покоя и для скольжения, так что предельная сила трения равна μN. Слово «сдвинуть» понимаем как достижение этого предела.

1. Горизонтальная верёвка. При $\alpha = 0$ нормальные реакции равны $N_1 = Mg$ и $N_2 = mg$. Чтобы сдвинуть сани, нужно $T \geq \mu_1 Mg = 200$ Н.

Но человека такая же сила T тянет по льду, а предельная сила трения под ним равна

$$\mu_2 mg = 0{,}3 \cdot 60 \cdot 10 = 180 \text{ Н} < 200 \text{ Н}.$$

Человек поедет по льду раньше, чем сдвинутся сани, значит, горизонтально потянуть не получится. Остаётся тянуть под углом.



Силы на сани (слева) и на человека (справа) при наклонной верёвке, угол $\alpha = 20°$ взят для наглядности. Длины стрелок согласованы: вертикальные и горизонтальные силы уравновешивают друг друга

2. Сани при наклонной верёвке. Верёвка тянет сани вверх и к человеку. Второй закон Ньютона для саней в проекции на вертикаль (сани не отрываются от льда и не движутся по вертикали): $N_1 + T\sin\alpha - Mg = 0$, откуда $N_1 = Mg - T\sin\alpha$. Сани сдвинутся, когда горизонтальная составляющая натяжения достигнет предельной силы трения:

$$T\cos\alpha \;\geq\; \mu_1\,(Mg - T\sin\alpha) \;\Rightarrow\; T \;\geq\; T_1(\alpha) = \frac{\mu_1 Mg}{\cos\alpha + \mu_1\sin\alpha}.$$

3. Человек при наклонной верёвке. Верёвка тянет человека к саням и вниз. Вертикаль: $N_2 = mg + T\sin\alpha$. Горизонтально сила трения со

стороны льда уравновешивает $T\cos\alpha$ и не может превосходить $\mu_2 N_2$:

$$T\cos\alpha \;\le\; \mu_2\,(mg + T\sin\alpha) \quad\Rightarrow\quad T\,(\cos\alpha - \mu_2\sin\alpha) \;\le\; \mu_2 mg.$$

Если $\operatorname{tg}\alpha \ge 1/\mu_2$, левая часть неположительна и неравенство верно при любом T. Иначе

$$T \;\le\; T_2(\alpha) = \frac{\mu_2 mg}{\cos\alpha - \mu_2\sin\alpha}.$$

4. Когда такое T существует. Нужно, чтобы $T_1(\alpha) \le T \le T_2(\alpha)$, то есть $T_1 \le T_2$. Освободимся от знаменателей (оба положительны) и разделим на $\cos\alpha$:

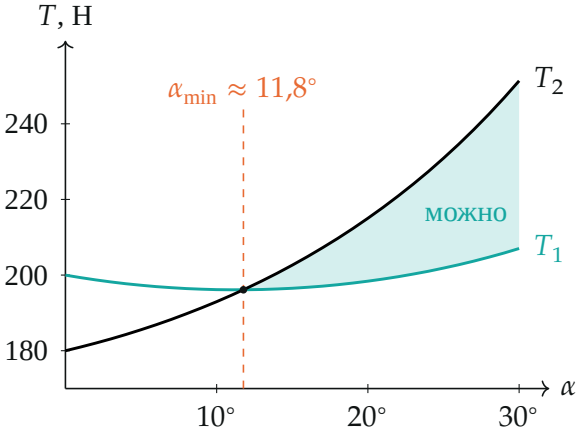
$$\mu_1 M\,(1 - \mu_2\operatorname{tg}\alpha) \;\le\; \mu_2 m\,(1 + \mu_1\operatorname{tg}\alpha) \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha \;\ge\; \frac{\mu_1 M - \mu_2 m}{\mu_1\mu_2\,(m+M)}.$$

Неравенство линейно по $\operatorname{tg}\alpha$, поэтому порог один: при меньших углах окно натяжений пусто, при больших — шире и шире. Числа:

$$\operatorname{tg}\alpha_{\min} = \frac{0{,}2\cdot 100 - 0{,}3\cdot 60}{0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 160} = \frac{2}{9{,}6} \approx 0{,}208, \qquad \alpha_{\min} \approx 11{,}8^\circ.$$

При этом угле $T_1 = T_2 = \dfrac{200}{\cos\alpha + 0{,}2\sin\alpha} \approx 196$ Н, а обе силы трения равны $T\cos\alpha \approx 192$ Н.

Обратите внимание: угол, наименее трудный для одних только саней, — это $\operatorname{tg}\alpha = \mu_1$ ($\alpha \approx 11{,}3^\circ$), но он не годится: человек при нём сорвётся. Ограничивает именно человек, поэтому $\alpha_{\min}$ чуть больше.



Допустимые натяжения: $T_1(\alpha)$ — нужно, чтобы сдвинуть сани; $T_2(\alpha)$ — предел, после которого человек поедет. Заливка — область, где человек стоит, а сани едут

Проверка. Размерность: $\operatorname{tg}\alpha$ безразмерен, числитель и знаменатель дроби — массы. Предельный случай: если $\mu_2 m \geq \mu_1 M$ (опора человека не слабее саней), числитель неположителен, и тянуть можно под любым углом, в том числе горизонтально — как и должно быть. Численно: при $\alpha = 10^\circ$ получаем $T_1 \approx 196{,}2$ Н $> T_2 \approx 193{,}0$ Н — окна нет; при $\alpha = 15^\circ$ $T_1 \approx 196{,}5$ Н $< T_2 \approx 202{,}6$ Н — окно есть.

Смысл: человеку не хватает веса для горизонтальной тяги, и он добирает сцепление наклоном верёвки: чем круче тянет, тем сильнее прижимается ко льду сам и тем легче сани.

Ответ. 1) Сможет, но только если тянуть верёвку под углом к горизонту (горизонтально — не сможет); 2) $\operatorname{tg}\alpha \geq \dfrac{\mu_1 M - \mu_2 m}{\mu_1 \mu_2 (m + M)} \approx 0{,}208$, то есть угол не меньше $\alpha_{\min} \approx 11{,}8^\circ$.