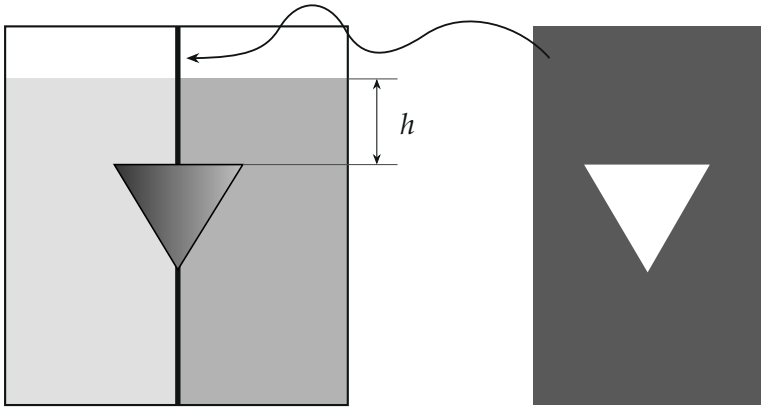
Пробка в треугольном отверстии между жидкостями

Задача 1. [Росатом 2025/26, 10 класс, задача 5] Вертикальная стенка с отверстием в виде правильного треугольника со стороной a и горизонтальным основанием разделяет сосуд на две половины. В эти части сосуда налиты разные жидкости: в одну половину налита жидкость с плотностью ρ, в другую налита жидкость с плотностью 2ρ. Высота уровня жидкостей по отношению к основанию отверстия — h (см. левый рисунок; справа показана перегородка сбоку). Отверстие заткнуто пробкой в виде конуса соответствующего размера. Найти силу, действующую на пробку со стороны жидкостей. Считать, что пробка закрывает отверстие герметично. **Указание.** Объём конуса с площадью основания S и высотой h равен $V = \frac{1}{3}hS$.



▲ **Решение. Что происходит.** Из рисунка видно, что отверстие — равносторонний треугольник вершиной вниз, а пробка — круглый конус с вертикальной осью и вершиной внизу. Плоскость перегородки проходит через ось конуса, так что осевое сечение конуса — тот же треугольник со стороной a: основание конуса — круг диаметра a на глубине h,

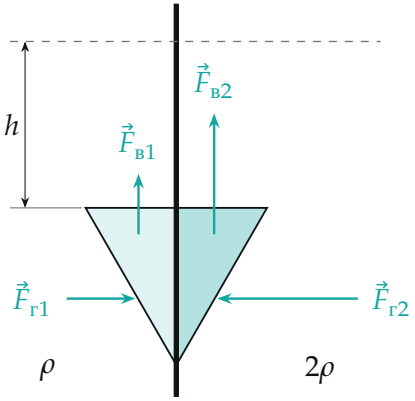
высота $H = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$, а объём

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24}\,a^3.$$

Одна половина конуса находится в жидкости ρ, другая — в жидкости 2ρ, и каждая жидкость давит на свою половину. Давление растёт с глубиной, поэтому интегрировать по поверхности не будем: вертикальную составляющую силы найдём по закону Архимеда, горизонтальную — через центр тяжести треугольника, а затем сложим силы обеих жидкостей.

Обозначения. $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ — площадь треугольника; h_c — глубина его центра тяжести (точки пересечения медиан); $F_{\text{в}}$, $F_{\text{г}}$ — вертикальная и горизонтальная составляющие искомой силы. Давление воздуха над жидкостями одинаково с обеих сторон и в сумме на пробку не действует, поэтому давление в жидкости считаем равным $\rho g\cdot$ (глубина).

1. Полуконус в одной жидкости. Возьмём половину конуса, лежащую в жидкости плотности ρ_1, и достроим её плоской гранью — сечением плоскостью перегородки, как если бы и она омывалась той же жидкостью. Тело погружено целиком, и на всю его поверхность действует сила Архимеда $F_{\text{A}} = \rho_1 g\, V/2$, направленная вертикально вверх. Она складывается из силы $\vec{F}_{\text{кр}}$ на настоящую поверхность (половину основания и половину боковой поверхности) и силы $\vec{F}_{\text{гр}}$ на воображаемую грань: $\vec{F}_{\text{A}} = \vec{F}_{\text{кр}} + \vec{F}_{\text{гр}}$. Давление на вертикальную грань горизонтально, так что $\vec{F}_{\text{гр}}$ горизонтальна и направлена внутрь полуконуса, к стороне этой жидкости. Поэтому $\vec{F}_{\text{кр}} = \vec{F}_{\text{A}} - \vec{F}_{\text{гр}}$: вертикальная составляющая силы жидкости на пробку равна F_{A} (вверх), а горизонтальная равна по модулю $F_{\text{гр}}$ и направлена от этой жидкости к другой.



Пробка, вид вдоль перегородки: левая половина лежит в жидкости ρ, правая — в жидкости 2ρ. Вертикальные силы $\vec{F}_{в1}$, $\vec{F}_{в2}$ — силы Архимеда для половин конуса, горизонтальные $\vec{F}_{г1}$, $\vec{F}_{г2}$ — горизонтальные составляющие сил жидкостей на пробку: по модулю равны силам давления на воображаемые грани, по направлению противоположны им (длины стрелок 1 : 2 выдержаны); h — глубина верхней стороны треугольника

2. Сила на воображаемую грань. Грань — вертикальный треугольник. Разобьём его на узкие горизонтальные полоски площадью ΔS_i на глубинах h_i. Давление на полоску $\rho_1 g h_i$, сила $\rho_1 g h_i \Delta S_i$ горизонтальна у всех полосок, и силы складываются арифметически:

$$F_{\text{гр}} = \rho_1 g \left(h_1 \Delta S_1 + h_2 \Delta S_2 + h_3 \Delta S_3 + \dots\right).$$

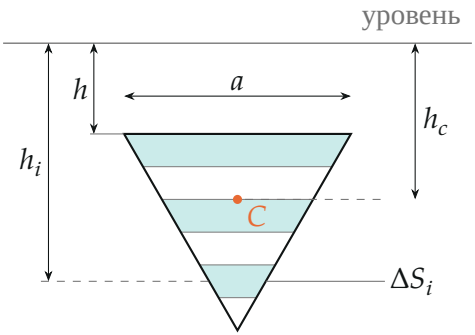
Сумма в скобках — «момент» площади относительно линии уровня. Для однородной пластинки с поверхностной плотностью σ она совпадает с моментом силы тяжести относительно той же линии, делённым на σg: $\sigma g \sum h_i \Delta S_i = \sigma S g\, h_c$, где h_c — расстояние от линии до центра тяжести пластинки. Значит,

$$\sum h_i \Delta S_i = S\, h_c, \qquad F_{\text{гр}} = \rho_1 g\, h_c\, S.$$

Центр тяжести треугольника лежит на трети высоты от основания. Ос-

нование у нас сверху, на глубине h, а высота $H = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, поэтому

$$h_c = h + \frac{H}{3} = h + \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$



Вертикальный треугольник, разбитый на горизонтальные полоски: h_i — глубина полоски площадью ΔS_i, C — центр тяжести (на трети высоты от верхней стороны), h_c — его глубина

Обратите внимание: глубина центра тяжести отсчитывается от поверхности жидкости до точки на трети высоты *ниже* верхней стороны, то есть $h_c = h + \frac{\sqrt{3}}{6}a$, а не h и не $h + \frac{H}{2}$.

3. Составляющие для каждой жидкости. Подставим V, S, h_c и $\rho_1 = \rho$ или 2ρ. Вертикальная составляющая (вверх) и горизонтальная (от жидкости к пробке и дальше, к другой жидкости):

$$F_{\text{в}1} = \rho g \frac{V}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{48}\rho g a^3, \qquad F_{\text{г}1} = \frac{\sqrt{3}}{4}\rho g a^2 \left(h + \frac{\sqrt{3}}{6}a\right);$$

$$F_{\text{в}2} = 2F_{\text{в}1}, \qquad F_{\text{г}2} = 2F_{\text{г}1}.$$

4. Сумма. Вертикальные составляющие обеих жидкостей направлены вверх и складываются, горизонтальные направлены навстречу, и резуль-

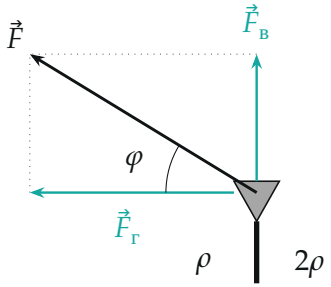
тирующая направлена в сторону лёгкой жидкости:

$$F_{\text{в}} = F_{\text{в}1} + F_{\text{в}2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{16}\rho g a^3, \qquad F_{\text{г}} = F_{\text{г}2} - F_{\text{г}1} = \frac{\sqrt{3}}{4}\rho g a^2\left(h + \frac{\sqrt{3}}{6}a\right).$$

Модуль и направление силы (напомним, $h_c = h + \frac{\sqrt{3}}{6}a$):

$$F = \sqrt{F_{\text{в}}^2 + F_{\text{г}}^2} = \frac{\rho g a^2}{4}\sqrt{\frac{3\pi^2 a^2}{16} + 3h_c^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{F_{\text{в}}}{F_{\text{г}}} = \frac{\pi a}{4h_c},$$

где φ — угол силы с горизонталью.



Итоговая сила: вертикальные силы обеих жидкостей складываются, горизонтальные вычитаются, результирующая направлена вверх и в сторону лёгкой жидкости

Проверка. Размерность: $\rho g a^2 \cdot a$ и $\rho g a^2 \cdot h$ — это кг/м^3·м/с^2·м^3 = Н. Если жидкости одинаковы, то $F_{\text{г}} = 0$, а $F_{\text{в}} = \rho g V$ — архимедова сила на весь конус, как и должно быть. Если конус маленький ($a \ll h$), то $F_{\text{г}} \approx (2\rho - \rho) g h S$ — разность давлений на площадь отверстия, а вертикальная составляющая $\propto a^3$ мала. Прямое численное интегрирование давления по поверхности конуса ($\rho = 1000$ кг/м^3, $a = 0{,}1$ м, $h = 0{,}2$ м) даёт $F_{\text{в}} = 3{,}33$ Н, $F_{\text{г}} = 9{,}71$ Н, $F = 10{,}27$ Н — как по формулам.

Ответ. 1) $F = \frac{\rho g a^2}{4}\sqrt{\frac{3\pi^2 a^2}{16} + 3h_c^2}$, где $h_c = h + \frac{\sqrt{3}}{6}a$; 2) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi a}{4h_c}$ — угол φ силы с горизонтом (сила направлена вверх и в сторону лёгкой жидкости).