Падающий стержень с двумя телами на нити

Задача 2. [Росатом 2025/26, заключительный этап, 11 класс, задача 2] К невесомому стержню ABC длиной l в точках A и B прикрепили два одинаковых точечных тела. Известно, что $AB : BC = 2 : 1$. За точку C стержень подвесили к очень длинной невесомой и нерастяжимой нити, второй конец которой прикреплён к горизонтальному потолку, и расположили так, как показано на рисунке: нить вертикальна, стержень горизонтален. В некоторый момент времени стержень отпустили. Какими будут скорости точек A, B и C в тот момент, когда стержень будет проходить самое низшее положение?

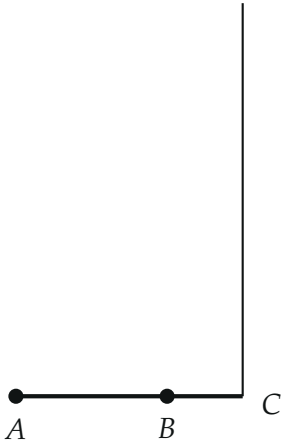
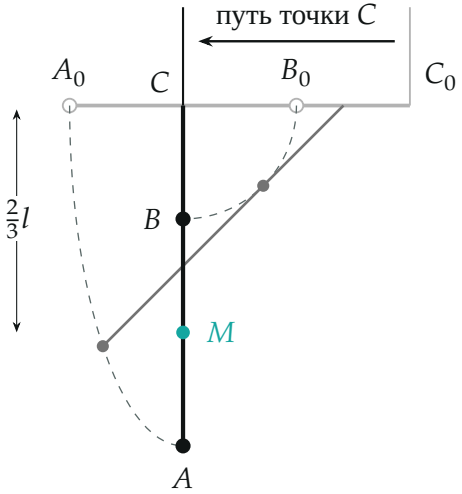


Рисунок условия: нить вертикальна, стержень горизонтален; тела A и B одинаковые

▲ **Решение. Что происходит.** Стержень отпущен горизонтальным, оба тела лежат по одну сторону от точки подвеса, и вес создаёт вращающий момент: стержень начинает опрокидываться. Нить длинная и нерастяжимая, поэтому точка C может смещаться только по горизонтали, а центр масс двух тел — только по вертикали. Главная идея задачи — в нижней точке центр масс на мгновение неподвижен, и стержень просто вращается вокруг него.

Обозначения. m — масса каждого тела; M — центр масс тел (середина AB), $MC = \frac{2}{3}l$, $MA = MB = \frac{1}{3}l$; ось y направлена вверх, начало отсчёта высоты — уровень начального положения стержня.

1. Что можно сказать о движении без вычислений. Нить нерастяжима и практически вертикальна (она очень длинная, её отклонения малы). Поэтому скорость точки C направлена перпендикулярно нити, то есть горизонтально, а высота точки C не меняется. На систему «два тела + стержень» действуют только вертикальные внешние силы — силы тяжести и натяжение нити. Проекция импульса системы на горизонтальную ось равна нулю в начале и остаётся нулевой, поэтому центр масс M по горизонтали не смещается и движется строго вниз.



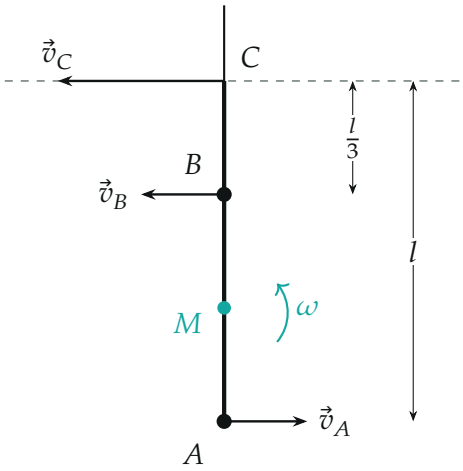
Стержень в начале (серый, точки A_0, B_0, C_0), в промежуточном положении и внизу; пунктир — траектории A и B; точка C идёт по горизонтали, центр масс M — вертикально вниз

2. Скорости в нижней точке. Центр масс опускается, пока стержень не станет вертикальным: тогда M ниже всего, на расстоянии $\frac{2}{3}l$ под C. В самой нижней точке своей траектории центр масс не имеет вертикальной скорости, а горизонтальной не было никогда. Значит, в этот момент $\vec{v}_M = 0$, и движение стержня — чистое вращение вокруг M с угловой

скоростью ω. Скорость каждой точки пропорциональна расстоянию до M:

$$v_A = v_B = \omega \cdot \tfrac{1}{3}l \equiv v, \qquad v_C = \omega \cdot \tfrac{2}{3}l = 2v.$$

Скорости перпендикулярны стержню, то есть горизонтальны. Точка A лежит по одну сторону от M, а B и C — по другую, поэтому $\vec{v}_A$ противоположна $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_C$. Это согласуется с тем, что C движется по горизонтали.



Нижнее положение: стержень вращается вокруг неподвижного центра масс; справа — на сколько опустились A и B

3. Закон сохранения энергии. Рассмотрим систему «два тела + стержень + нить» от начала до нижнего положения. Нить и стержень работы не совершают: сила натяжения нити вертикальна, а точка C движется по горизонтали, стержень невесомый и нерастяжимый. Работает только сила тяжести. Тело A опустилось на l, тело B — на $\frac{1}{3}l$ (точка C осталась на прежней высоте, стержень стал вертикальным). Начальная кинетическая энергия равна нулю:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mgl + mg\frac{l}{3} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{4gl}{3}, \qquad v = \sqrt{\frac{4gl}{3}} = 2\sqrt{\frac{gl}{3}}.$$

Тогда $v_C = 2v$.

Обратите внимание: вращение вокруг точки C как вокруг оси здесь неверно. В нижнем положении C движется (со скоростью $2v$), неподвижна именно точка M; если взять за ось C, получится $v_A = \omega l$, $v_B = \omega l/3$ — скорости разной величины, что противоречит равенству нулю горизонтального импульса.

Проверка. Второй способ: вращение вокруг M с моментом инерции

$$I = 2m\left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}ml^2,$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{4}{3}mgl \;\Rightarrow\; \omega^2 = \frac{12g}{l}, \qquad v_C = \omega\cdot\frac{2}{3}l = 4\sqrt{\frac{gl}{3}},$$

то же. Нить остаётся натянутой: численное интегрирование уравнения движения даёт $T = 0{,}4\,mg > 0$ в начале и $T = 18\,mg$ в нижней точке (там центр масс разворачивается и ускоряется вверх с $a = \omega^2\cdot 2l/3 = 8g$, откуда $T = 2m(g + 8g)$).

Ответ. $v_A = v_B = \sqrt{\dfrac{4gl}{3}}$ (точка A движется в одну сторону, B — в противоположную); $v_C = 2\sqrt{\dfrac{4gl}{3}} = 4\sqrt{\dfrac{gl}{3}}$ (точка C движется в ту же сторону, что и B).