Катящееся кольцо с разрезом в магнитном поле

Задача 3. [Росатом 2025/26, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Имеется сделанное из жёсткой металлической проволоки кольцо, из которого вырезан маленький промежуток AB длиной Δl, который много меньше радиуса кольца. Кольцо катится без проскальзывания со скоростью v по горизонтальной поверхности в горизонтальном магнитном поле с индукцией B (см. рисунок). Найти электрическое напряжение на промежутке AB. Какой конец промежутка AB будет заряжен положительно, а какой отрицательно?

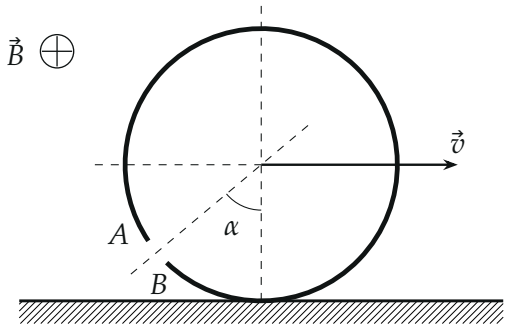


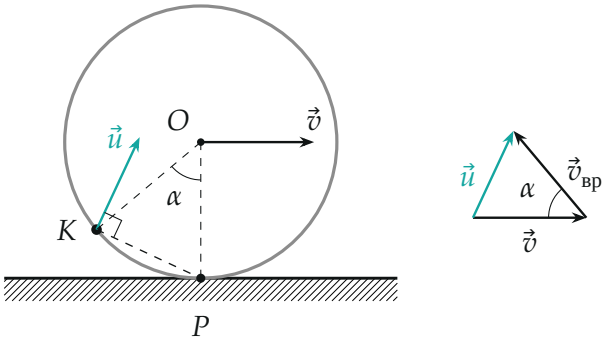
Рисунок условия: поле $\vec{B}$ направлено за чертёж; α — угол между вертикалью и прямой, проведённой из центра кольца к промежутку

▲ **Решение. Что происходит.** Металл кольца движется в магнитном поле, и на свободные заряды внутри него действует сила Лоренца. Тока нет — кольцо разомкнуто, поэтому заряды перераспределяются, пока электрическое поле внутри проволоки не уравновесит силу Лоренца вдоль неё. Главная идея: у каждой точки кольца скорость складывается из скорости центра и скорости вращения, а сила Лоренца от вращательной части направлена поперёк проволоки и вдоль неё ничего не даёт. Остаётся одна «эффективная» сила — от поступательного движения, она везде одинакова. Тогда разность потенциалов между двумя точками кольца равна работе этого однородного поля, то есть определяется разностью высот точек.

Обозначения. Ось x — вдоль направления движения (вправо), ось y — вверх, поле $\vec{B}$ направлено от нас; R — радиус кольца, $\omega = v/R$ —

угловая скорость кольца (качение без проскальзывания), $\vec{u}$ — скорость точки кольца относительно земли, φ — потенциал точки кольца.

1. Скорость точек кольца. Качение без проскальзывания — сумма поступательного движения со скоростью $\vec{v}$ (центр кольца) и вращения вокруг центра с угловой скоростью $\omega = v/R$. Скорость вращательного движения любой точки по модулю равна $\omega R = v$ и направлена по касательной к кольцу. Точка касания с землёй неподвижна, потому что там $\vec{v}$ и вращательная скорость равны и противоположны.



Слева — кольцо в мгновенном положении: P — точка касания. Справа — сложение скоростей для точки K промежутка; треугольник равнобедренный с углом α при вершине

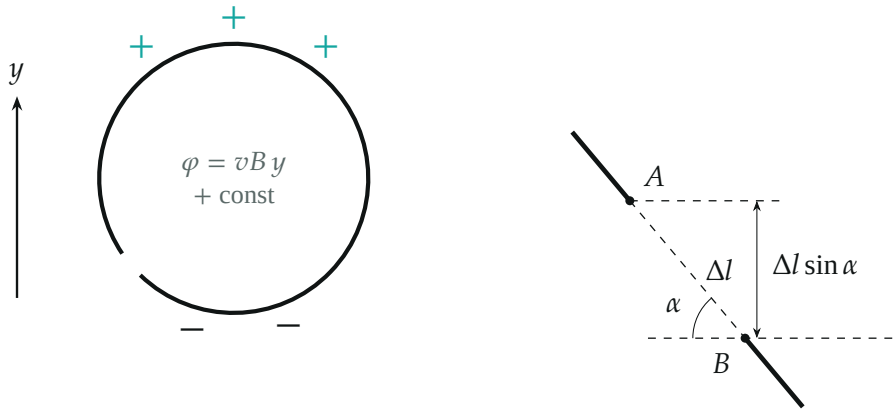
2. Что делает сила Лоренца. Для заряда q в точке с скоростью $\vec{u}$ сила равна $q\,\vec{u} \times \vec{B}$. Здесь $\vec{u} = \vec{v} + \vec{v}_{вр}$, поэтому сила состоит из двух частей. Часть от вращения $q\,\vec{v}_{вр} \times \vec{B}$ перпендикулярна $\vec{v}_{вр}$, а значит, направлена вдоль радиуса и поперёк проволоки: вдоль провода она ничего не делает. Часть от поступательного движения $q\,\vec{v} \times \vec{B}$ в любой точке одна и та же: по правилу векторного произведения (поле от нас, $\vec{v}$ вправо) для положительного заряда она направлена *вверх* и по модулю равна qvB.

3. Потенциал вдоль проволоки. Электрический ток отсутствует, поэтому вдоль проволоки сумма электрической силы и силы Лоренца равна нулю: $qE_{\parallel} + qvB\cos\beta = 0$, где β — угол между направлением «вверх» и касательной. Проекция $E_{\parallel} = -\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}s$, откуда $\mathrm{d}\varphi = vB\cos\beta\,\mathrm{d}s = vB\,\mathrm{d}y$, где $\mathrm{d}y$ — приращение высоты на отрезке $\mathrm{d}s$ проволоки. Суммируем по

пути от точки до точки (кольцо — одно связное проводящее тело, всё вдоль него в равновесии):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = vB\,(y_2 - y_1), \qquad \text{то есть} \qquad \varphi = vB\,y + \text{const}.$$

Потенциал растёт вверх: верх кольца заряжен положительно, низ — отрицательно (кольцо поляризуется, как металлический стержень, движущийся поперёк поля).



Слева — распределение потенциала по кольцу (φ растёт вверх); справа — промежуток AB в увеличенном виде: касательная к кольцу наклонена к горизонтали под углом α

4. Напряжение на промежутке. Промежуток — маленький участок кольца в точке, радиус-вектор которой составляет угол α с вертикалью, поэтому касательная к кольцу составляет с горизонталью тот же угол α. Конец A выше конца B на $\Delta l \sin\alpha$:

$$U = \varphi_A - \varphi_B = vB\,(y_A - y_B) = Bv\,\Delta l\,\sin\alpha.$$

Потенциал точки A выше, чем точки B: A — положительный конец промежутка, B — отрицательный.

Обратите внимание: знаки определяются направлением силы Лоренца от поступательного движения. Для положительных зарядов она направлена вверх, поэтому выше — плюс. Если бы поле было направлено

на нас, знаки поменялись бы местами. В официальном решении знаки названы обратными: там считают, что у кольца знаки противоположны знакам у вставленного в промежуток кусочка провода, но разность потенциалов между точками A и B одна и та же, по какому бы проводнику их ни соединить, — потенциал зависит только от высоты точки, и верхний конец A заряжен положительно. Вращение кольца знаки не определяет: оно даёт только величину u, но вдоль провода его вклад равен нулю.

Проверка. Другой способ — через скорость точки K. Основание равнобедренного треугольника скоростей даёт $u = 2v\sin\frac{\alpha}{2}$, а угол между $\vec{u}$ и нормалью к промежутку равен $\frac{\alpha}{2}$, поэтому вдоль промежутка работает компонента

$$Bu\cos\frac{\alpha}{2} = 2Bv\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = Bv\sin\alpha,$$

и $U = Bv\,\Delta l\sin\alpha$ — тот же результат. Пределы: при $\alpha \to 0$ (промежуток у точки касания) $U \to 0$, там скорость равна нулю; при $\alpha = 90^\circ$ (на уровне центра) $U = Bv\,\Delta l$, как у прямого проводника, движущегося со скоростью v поперёк поля; при $\alpha = 180^\circ$ (наверху) $U = 0$: проволока там горизонтальна, и сила Лоренца вдоль неё равна нулю.

Ответ. $U = Bv\,\Delta l\sin\alpha$; верхний конец A имеет больший потенциал (заряжен положительно), нижний конец B — отрицательно.