Стержень на движущейся полусфере

Задача 4. [Росатом 2025/26, заключительный этап, 11 класс, задача 4] На горизонтальной поверхности шарнирно закреплён стержень длиной l. Стержень опирается на полушар радиуса R, который двигают со скоростью v в направлении шарнира (см. рисунок). Найти скорость и ускорение конца стержня в тот момент, когда угол между стержнем и поверхностью равен $\alpha = 45°$.

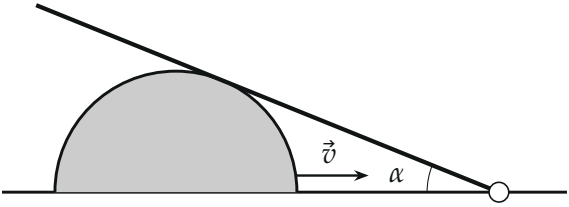
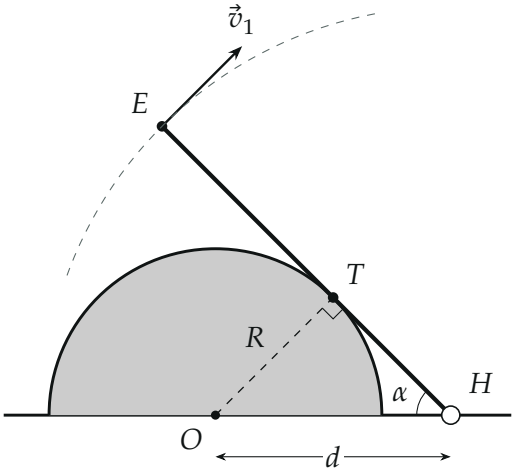


Рисунок условия: стержень шарнирно закреплён справа и опирается на полушар, который едет к шарниру

▲ **Решение. Что происходит.** Полушар едет к шарниру, стержень лежит на нём и поворачивается вокруг шарнира вверх: угол α растёт, потому что расстояние от центра полушара до шарнира уменьшается. Главная идея: стержень касается полушара, поэтому связь расстояния и угла даёт прямоугольный треугольник, а его производная по времени — угловую скорость стержня ω. Дальше конец стержня просто движется по окружности радиуса l вокруг шарнира с угловой скоростью ω: скорость ωl, ускорение раскладывается на нормальное $\omega^2 l$ и касательное $\dot{\omega} l$.

Обозначения. H — шарнир, O — центр полушара (лежит на поверхности), T — точка касания стержня и полушара, E — конец стержня; $d = OH$; $\omega = \dot{\alpha}$ — угловая скорость стержня, $\varepsilon = \dot{\omega}$ — угловое ускорение. Скорость полушара v постоянна.



Радиус OT перпендикулярен стержню, треугольник OTH прямоугольный; конец стержня движется по окружности радиуса l вокруг H

1. Связь расстояния и угла. Стержень касается полушара в точке T, а радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. Значит, треугольник OTH прямоугольный с прямым углом при T, его гипотенуза $OH = d$, катет $OT = R$, угол при вершине H равен α:

$$R = d\sin\alpha.$$

Полушар движется к шарниру со скоростью v, поэтому $\dot{d} = -v$.

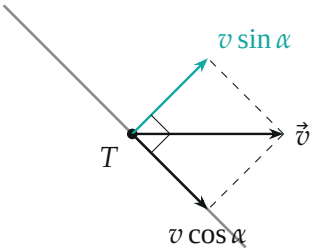
2. Угловая скорость стержня. Продифференцируем соотношение $R = d\sin\alpha$ по времени (R постоянно):

$$0 = \dot{d}\sin\alpha + d\cos\alpha\,\dot{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \omega = \dot{\alpha} = \frac{v\sin\alpha}{d\cos\alpha} = \frac{v\sin^2\alpha}{R\cos\alpha},$$

где использовано $d = R/\sin\alpha$.

3. Скорость конца. Конец E стержня движется по окружности радиуса l вокруг шарнира, его скорость направлена перпендикулярно стержню:

$$v_1 = \omega l = \frac{vl\sin^2\alpha}{R\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad v_1\big|_{\alpha=45^\circ} = \frac{vl}{\sqrt{2}\,R}.$$



Скорость $\vec{v}$ полушара в точке T раскладывается на составляющую вдоль стержня (скольжение) и составляющую $v\sin\alpha$ по нормали к нему

Тот же результат даёт второй способ: полушар не может пройти сквозь стержень, поэтому нормальные к стержню составляющие скоростей точки стержня в T и полушара совпадают. Скорость точки стержня в T перпендикулярна стержню и равна $\omega \cdot HT$, где $HT = d\cos\alpha = R\cos\alpha/\sin\alpha$; нормальная составляющая скорости полушара равна $v\sin\alpha$. Следовательно, $\omega R\cos\alpha/\sin\alpha = v\sin\alpha$, то есть то же $\omega = v\sin^2\alpha/(R\cos\alpha)$.

4. Нормальное ускорение конца. Конец E движется по окружности радиуса l вокруг H, поэтому его ускорение раскладывается на нормальное (вдоль стержня к шарниру) и касательное (перпендикулярно стержню, в сторону вращения). Нормальное:

$$a_n = \omega^2 l = \frac{v^2 l \sin^4\alpha}{R^2\cos^2\alpha}.$$

5. Касательное ускорение конца. Угловая скорость меняется со временем (ω зависит от α), поэтому $\varepsilon = \dot{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\alpha}\,\omega$. Производная

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin^3\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha\,(1+\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha},$$

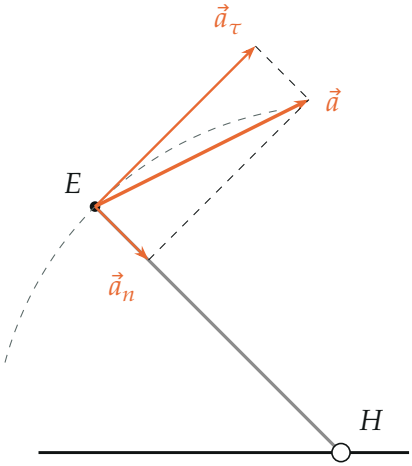
откуда

$$\varepsilon = \frac{v}{R}\cdot\frac{\sin\alpha\,(1+\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{v\sin^2\alpha}{R\cos\alpha} = \frac{v^2}{R^2}\frac{\sin^3\alpha\,(1+\cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha}, \qquad a_\tau = \varepsilon l.$$

6. Полное ускорение при $\alpha = 45°$**.** Здесь $\sin\alpha = \cos\alpha = 1/\sqrt{2}$, поэтому $\sin^3\alpha/\cos^3\alpha = 1$, $1 + \cos^2\alpha = \frac{3}{2}$, $\sin^4\alpha/\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$:

$$a_n = \frac{1}{2}\frac{v^2 l}{R^2}, \qquad a_\tau = \frac{3}{2}\frac{v^2 l}{R^2}, \qquad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}\frac{v^2 l}{R^2} \approx 1{,}58\,\frac{v^2 l}{R^2}.$$

Составляющие перпендикулярны, поэтому складываем их по теореме Пифагора. Вектор $\vec{a}$ составляет со стержнем угол $\operatorname{arctg} 3 \approx 71{,}6°$, то есть направлен под углом $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 26{,}6°$ к поверхности, вперёд (в сторону движения полушара) и вверх.



Ускорение конца стержня при $\alpha = 45°$*:* $a_n : a_\tau = 1 : 3$ *(на рисунке длины стрелок в этом отношении)*

Обратите внимание: ускорение не равно $\omega^2 l$. Это только нормальная часть — центростремительное ускорение при вращении с *постоянной* угловой скоростью. Здесь ω растёт (расстояние d уменьшается всё быстрее), и касательная часть втрое больше нормальной.

Проверка. Размерность: $v_1 \sim v\,l/R$ — скорость, $a \sim v^2 l/R^2$ — ускорение. Предел: $\alpha \to 0$ даёт $\omega \to 0$ (полушар ещё далеко), $\alpha \to 90°$ даёт $\omega \to \infty$ (стержень почти вертикален, $d \to R$) — при заданной скорости полушара так и должно быть. Численно: при $R = 1$, $v = 1$, $l = 3$ вторая

разность координат конца стержня $E(t)$ при $\alpha = 45°$ даёт $|a| = 4{,}7434$, формула $\sqrt{5/2} \cdot 3 = 4{,}7434$; $|v_1| = 2{,}1213 = 3/\sqrt{2}$.

Ответ. $v_1 = \dfrac{vl \sin^2 \alpha}{R \cos \alpha}$, при $\alpha = 45°$ $v_1 = \dfrac{vl}{\sqrt{2}\, R}$; ускорение конца стержня при $\alpha = 45°$: $a_n = \dfrac{v^2 l}{2R^2}$, $a_\tau = \dfrac{3v^2 l}{2R^2}$, $a = \sqrt{\dfrac{5}{2}}\, \dfrac{v^2 l}{R^2}$.