Два тела на нити после толчка

Задача 5. [Росатом 2025/26, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Два одинаковых точечных тела покоятся на горизонтальной поверхности на расстоянии l друг от друга. Тела связаны невесомой гибкой нерастяжимой нитью длиной $2l$. В некоторый момент времени телам сообщили одинаковые по величине, но противоположно направленные скорости v. Эти скорости направлены перпендикулярно отрезку между телами (см. рисунок; вид сверху). Найти траекторию тел и её геометрические параметры, а также времена прохождения её основных участков. Трения и каких-либо неупругих процессов нет.

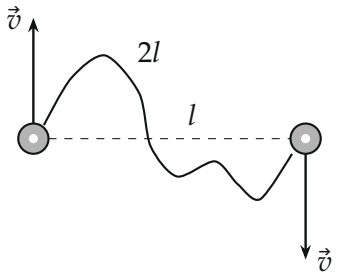


Рисунок условия: вид сверху, нить провисает

▲ **Решение. Что происходит.** Пока расстояние между телами меньше $2l$, нить провисает и тела летят прямо. Когда оно достигнет $2l$, нить на миг натянется и упруго рванёт тела вдоль себя, потом снова провиснет — и так раз за разом. Центр масс неподвижен, поэтому достаточно следить за одним телом.

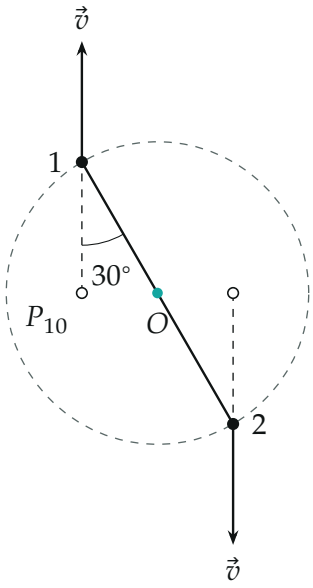
Обозначения. Тела 1 и 2, O — середина отрезка между ними. Начало отсчёта — в O, ось x — вдоль начального отрезка, ось y — по начальной скорости тела 1: тело 1 в точке $(-\frac{l}{2}; 0)$ со скоростью $(0; v)$, тело 2 в точке $(\frac{l}{2}; 0)$ со скоростью $(0; -v)$.

1. Центр масс стоит на месте. Трения нет, нить — внутренняя сила, поэтому по закону сохранения импульса суммарный импульс остаётся равным нулю, и середина O неподвижна. Тела (масса m каждое) всё время симметричны относительно O, расстояние между ними $2r$, где r — расстояние от тела 1 до O: нить натягивается, когда $r = l$.

2. Свободный полёт до первого натяжения. Тело 1 движется по прямой $x = -\frac{l}{2}$, $y = vt$. Условие $r = l$:

$$\frac{l^2}{4} + v^2 t_1^2 = l^2 \quad \Rightarrow \quad vt_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} l, \qquad t_1 = \frac{\sqrt{3}\, l}{2v}.$$

В прямоугольном треугольнике $OP_{10}P_1$ катет $OP_{10} = l/2$ вдвое меньше гипотенузы $OP_1 = l$, поэтому скорость тела 1 составляет с нитью угол 30°.

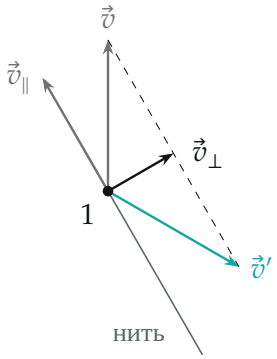


Момент первого натяжения нити: тела на окружности радиуса l с центром O в противоположных точках; P_{10} — начальное положение тела 1

3. Рывок нити. Нить направлена вдоль прямой 12, через O, и действует на тела равными и противоположными силами вдоль этой прямой. Разложим скорость тела 1 (рисунок ниже) на составляющую вдоль нити (наружу, от тела 2) и поперечную:

$$v_\parallel = v\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} v, \qquad v_\perp = v \sin 30^\circ = \frac{v}{2}.$$

Поперечные составляющие нить не меняет. Для продольных (ось — от тела 2 к телу 1, $u_1 = -u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}v$) запишем закон сохранения импульса $u_1' + u_2' = 0$ и закон сохранения энергии $u_1'^2 + u_2'^2 = u_1^2 + u_2^2$ (неупругих процессов нет). Корень $u_1' = u_1$ означает, что нить не подействовала, поэтому подходит $u_1' = -u_1$: продольные составляющие меняют знак.

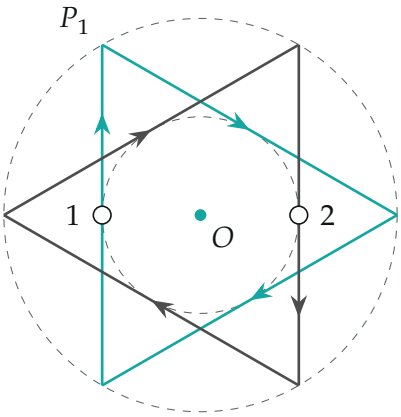


До рывка скорость $\vec{v}$ (серая), после — $\vec{v}'$ (бирюзовая): поперечная составляющая $\vec{v}_\perp$ общая, составляющая вдоль нити $\vec{v}_\parallel$ сменила знак

4. Скорость после рывка и дальнейшее движение. Модуль новой скорости прежний, v, а направление повёрнуто на 120° по часовой стрелке: $\vec{v}' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}v;\ -\frac{v}{2}\right)$. Тело летит по прямой; пройдя путь s, оно находится от O на расстоянии

$$r^2 = \left(-\frac{l}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}s\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l - \frac{s}{2}\right)^2 = l^2 - \sqrt{3}\,ls + s^2,$$

так что при $0 < s < \sqrt{3}\,l$ нить провисает, а при $s = \sqrt{3}\,l$ снова $r = l$ — следующий рывок. Отрезок — хорда окружности радиуса l под углом 30° к радиусу: $a = 2l\cos 30° = \sqrt{3}\,l$. В новой вершине всё повторяется.



Траектории тела 1 (бирюза) и тела 2 (чёрный); пунктир — окружности радиусов l и $l/2$ с центром O, начальные положения тел — точки касания малой

5. Траектория и времена. Тело 1 идёт со скоростью v по сторонам правильного треугольника со стороной $a = \sqrt{3}\,l$, тело 2 — по такому же, повёрнутому на 180° вокруг O. Старт — в середине стороны, рывки — в вершинах; время до первого рывка t_1, между рывками τ, полный обход (путь $3a$) — за T:

$$t_1 = \frac{a/2}{v} = \frac{\sqrt{3}\,l}{2v}, \qquad \tau = \frac{a}{v} = \frac{\sqrt{3}\,l}{v}, \qquad T = \frac{3a}{v} = \frac{3\sqrt{3}\,l}{v}.$$

Обратите внимание: нить не «гасит» движение — рывок упругий, и скорость по модулю остаётся v на всей траектории.

Проверка. Момент импульса относительно O сохраняется, потому что сила нити направлена по прямой через O и момента не создаёт. В начале $L = 2m\,v\,\frac{l}{2} = mvl$; на стороне треугольника расстояние от O до прямой движения равно радиусу вписанной окружности $\frac{l}{2}$, и $L = 2m\,v\,\frac{l}{2}$ — то же. Энергия mv^2 тоже постоянна.

Ответ. Каждое тело движется со скоростью v по сторонам правильного треугольника со стороной $a = \sqrt{3}\,l$, вписанного в окружность радиуса l с центром в центре масс (вместе — шестиконечная звезда); до первого натяжения $t_1 = \sqrt{3}\,l/(2v)$, одна сторона — за $\sqrt{3}\,l/v$, полный обход (путь $3\sqrt{3}\,l$) — за $T = 3\sqrt{3}\,l/v$.