Три вольтметра и два источника

Задача 1. [Росатом 2025/26, 11 класс, задача 1] Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке, содержит два идеальных источника электрического напряжения и три одинаковых вольтметра. Известно, что напряжение левого источника — $\varepsilon_1 = 5$ В, а вольтметр V_1 показывает напряжение $U_1 = 1{,}4\,\varepsilon_1$. Найти напряжение второго источника и показания вольтметров V_2 и V_3.

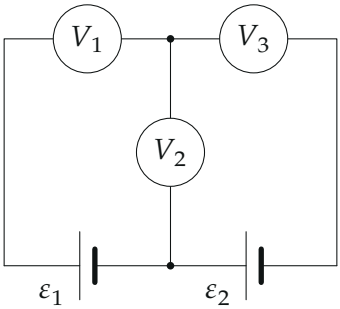
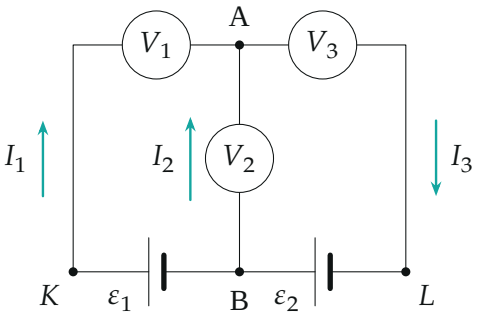


Схема цепи

▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметр здесь — обычный резистор, и у всех трёх сопротивление одно и то же, R. Ток через вольтметр течёт, поэтому его показание равно IR и пропорционально току. Главная идея: расставить потенциалы узлов, выразить токи через них законом Ома, а в узле записать закон сохранения заряда.

Обозначения. Источники идеальные: у значка источника длинная чёрточка — «плюс», короткая жирная — «минус». Потенциал нижнего узла B примем равным нулю, верхний узел обозначим A, а нижние углы схемы — K (слева) и L (справа). Неизвестен один потенциал: $\varphi_A = x$. Токи считаем положительными в направлениях, показанных на рисунке: I_1 из K в A через V_1, I_2 из B в A через V_2, I_3 из A в L через V_3. Если ток на самом деле течёт в другую сторону, его проекция окажется отрицательной, и все уравнения остаются верными.



Токи в цепи и обозначения узлов

1. Потенциалы по краям. Внутри источника потенциал растёт от «минуса» к «плюсу» на ε. У левого источника «плюс» слева, поэтому $\varphi_K = \varphi_B + \varepsilon_1 = \varepsilon_1$. У правого источника «плюс» тоже слева, на стороне узла B, значит $\varphi_L = \varphi_B - \varepsilon_2 = -\varepsilon_2$.

2. Токи через вольтметры. Закон Ома для участка с вольтметром (напряжение $= \varphi_{\text{начало}} - \varphi_{\text{конец}}$, ток по направлению обхода):

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 - x}{R}, \qquad I_2 = \frac{0 - x}{R} = -\frac{x}{R}, \qquad I_3 = \frac{x - (-\varepsilon_2)}{R} = \frac{x + \varepsilon_2}{R}.$$

3. Закон сохранения заряда в узле A. Заряд в узле не накапливается: сумма втекающих токов равна вытекающему, $I_1 + I_2 = I_3$. Подставим токи и умножим на R:

$$(\varepsilon_1 - x) - x = x + \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3}.$$

Обратите внимание: вольтметр показывает модуль напряжения, поэтому $U_1 = |\varepsilon_1 - x|$, $U_2 = |x|$, $U_3 = |x + \varepsilon_2|$, и условие $U_1 = 1{,}4\,\varepsilon_1$ даёт два случая: $\varepsilon_1 - x = \pm 1{,}4\,\varepsilon_1$.

4. Выбор случая. Из пункта 3 $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - 3x$.

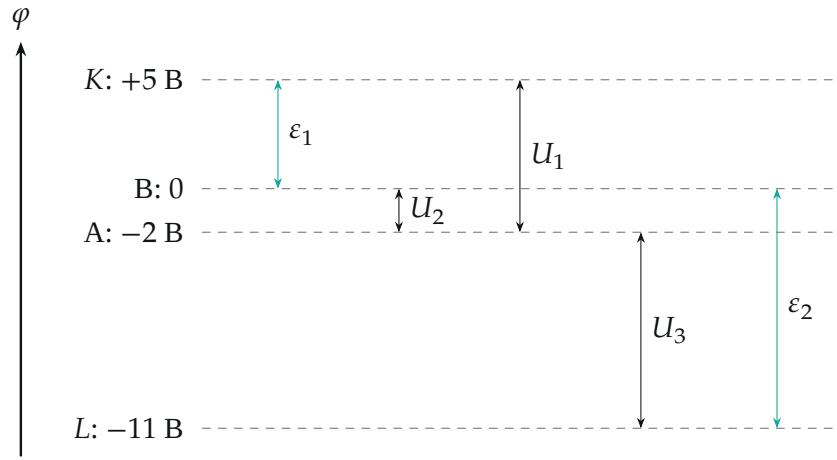
- $\varepsilon_1 - x = 1{,}4\,\varepsilon_1$, то есть $x = -0{,}4\,\varepsilon_1$: тогда $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 1{,}2\,\varepsilon_1 = 2{,}2\,\varepsilon_1 > 0$, такой источник включён так, как нарисовано;
- $\varepsilon_1 - x = -1{,}4\,\varepsilon_1$, то есть $x = 2{,}4\,\varepsilon_1$: тогда $\varepsilon_2 = -6{,}2\,\varepsilon_1 < 0$, то есть «плюс» правого источника оказался бы справа, а не слева, как на схеме. Этот случай не подходит.

Остаётся $x = -0{,}4\,\varepsilon_1 = -2$ В, откуда $\varepsilon_2 = 2{,}2\,\varepsilon_1 = 11$ В.

5. Показания вольтметров V_2 и V_3.

$$U_2 = |x| = 0{,}4\,\varepsilon_1 = 2 \text{ В},$$
$$U_3 = x + \varepsilon_2 = -0{,}4\,\varepsilon_1 + 2{,}2\,\varepsilon_1 = 1{,}8\,\varepsilon_1 = 9 \text{ В}.$$

Все три тока положительны ($I_1 \propto 1{,}4\,\varepsilon_1$, $I_2 \propto 0{,}4\,\varepsilon_1$, $I_3 \propto 1{,}8\,\varepsilon_1$) и текут так, как нарисовано.



Потенциалы узлов (потенциал B принят за нуль). $\varepsilon_1 = 5$ В, $U_1 = 7$ В, $U_2 = 2$ В, $U_3 = 9$ В, $\varepsilon_2 = 11$ В

Проверка. Три независимых соотношения: правый контур B → V_2 → A → V_3 → L → источник ε_2 даёт $\varepsilon_2 = U_2 + U_3 = 2 + 9 = 11$ В; левый контур даёт $\varepsilon_1 = U_1 - U_2 = 7 - 2 = 5$ В; токи в узле A — $U_1 + U_2 = U_3$, то есть $7 + 2 = 9$. Все сошлись с условием и друг с другом.

Физический смысл: токи I_1 и I_2 втекают в узел A, а вытекает один ток I_3 равный их сумме, поэтому у V_3 показание наибольшее.

Ответ. $\varepsilon_2 = 2{,}2\,\varepsilon_1 = 11$ В; $U_2 = 0{,}4\,\varepsilon_1 = 2$ В; $U_3 = 1{,}8\,\varepsilon_1 = 9$ В.