Кольца на нитях через гладкое кольцо

Задача 2. [Росатом 2025/26, 11 класс, задача 2] Три невесомых и нерастяжимых нити одинаковой длины прикреплены на равных расстояниях друг от друга к сделанному из проволоки массивному кольцу радиуса $2R$. Вторые концы нитей пропущены через гладкое кольцо радиуса R, сделанное из той же проволоки, и прикреплены к горизонтальному потолку на равных расстояниях друг от друга. В результате плоскости обеих колец оказываются горизонтальными, участки нитей от малого кольца до потолка — вертикальными (см. рисунок). Найти расстояние между плоскостями колец.

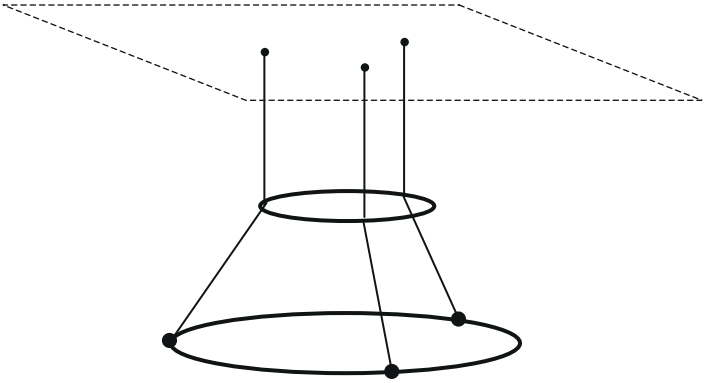
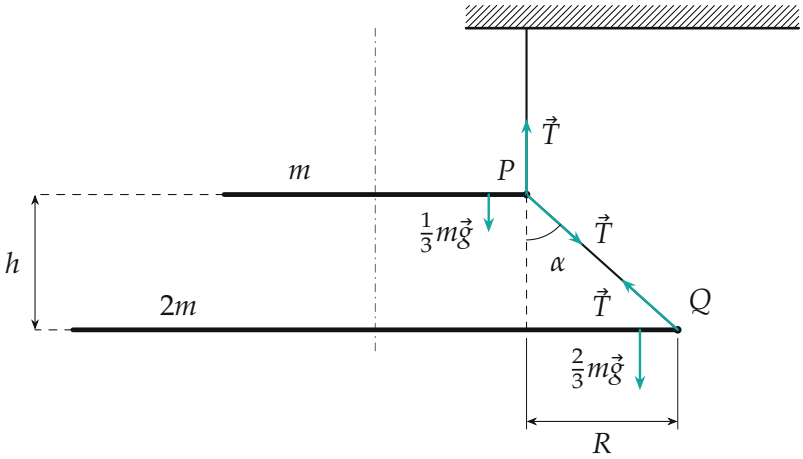


Рисунок условия

▲ **Решение. Что происходит.** Каждая нить идёт от потолка вертикально вниз к малому кольцу, огибает его и наклонно уходит вниз к большому кольцу. Малое кольцо гладкое, нить по нему скользит, поэтому вдоль всей нити сила натяжения одна и та же, T. Главная идея: из равновесия колец найти T и угол α наклонных участков, а по углу — расстояние между плоскостями.

Обозначения. Масса малого кольца m. Кольца сделаны из одной проволоки, масса пропорциональна длине, а длина окружности — радиусу, поэтому масса большого кольца $2m$. Угол между вертикалью и наклонным участком нити — α, расстояние между плоскостями колец — h. По рисунку условия каждая нить вместе с вертикальным участком лежит в

плоскости, проходящей через ось колец: точка P нити на малом кольце (радиус R) и точка Q её крепления на большом (радиус $2R$) лежат на одном луче от оси. Нити невесомы.



Вид сбоку: плоскость, проходящая через ось и одну нить. Силы изображены на одну нить: веса колец поделены поровну между тремя нитями

1. Равновесие системы «оба кольца и нити». На систему действуют снаружи три силы натяжения вертикальных участков, по T каждая, направленные вверх, и сила тяжести $3mg$. Наклонные участки нитей соединяют части системы между собой и в условие равновесия не входят. Запишем условие равновесия в проекции на вертикаль:

$$3T - 3mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = mg.$$

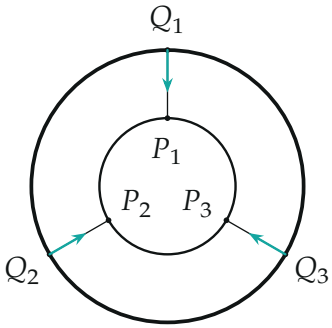
Обратите внимание: натяжение вертикального и наклонного участков равно только потому, что кольцо гладкое.

2. Равновесие большого кольца. На него действуют сила тяжести $2mg$ вниз и три силы T, направленные вдоль наклонных участков вверх и к оси. Горизонтальные составляющие $T\sin\alpha$ трёх сил лежат под углами 120° друг к другу (вид сверху ниже) и в сумме дают нуль. Остаются вертикальные составляющие:

$$3T\cos\alpha - 2mg = 0.$$

Подставим $T = mg$ из пункта 1:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



Вид сверху: три нити лежат на лучах через $120°$*; стрелки — горизонтальные составляющие* $T\sin\alpha$ *сил на большое кольцо, они взаимно уравновешены*

3. Расстояние между плоскостями. Участок нити от P до Q, вертикаль от P вниз и горизонталь в плоскости большого кольца образуют прямоугольный треугольник: катет по вертикали равен h, по горизонтали — разности радиусов $2R - R = R$. Поэтому $\tan\alpha = R/h$, и

$$h = \frac{R}{\tan\alpha} = \frac{2R}{\sqrt{5}} \approx 0{,}89\,R.$$

Проверка. Второй способ — равновесие малого кольца. У каждой нити на него действуют сила T вверх (вертикальный участок), сила T вдоль наклонного участка вниз и треть веса $\frac{1}{3}mg$. Вертикальная проекция: $T - T\cos\alpha - \frac{1}{3}mg = 0$, откуда $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ — тот же угол, найденный независимо. Размерность: h — длина, как и R.

Физический смысл: большое кольцо вдвое тяжелее малого, а удерживается тремя наклонными участками с вертикальной проекцией $\frac{2}{3}mg$ на каждый, поэтому нити наклонены заметно ($\alpha \approx 48°$), а кольца расположены близко: $h < R$.

Ответ. $h = 2R/\sqrt{5} \approx 0{,}89\,R$.