Цикл с изохорой, адиабатой и линейным участком

Задача 3. [Росатом 2025/26, 11 класс, задача 3] Одноатомный идеальный газ участвует в циклическом процессе 1–2–3–1, состоящем из изохоры 1–2, адиабаты 2–3 и линейной зависимости давления от объёма 3–1 $p = \alpha V$, где α — некоторое число (см. рисунок). Известно, что в изохорическом процессе 1–2 давление газа возросло вдвое. Найти КПД цикла.

Указание. В адиабатическом процессе, проходящем с одноатомным идеальным газом, давление и объём газа связаны соотношением $pV^{5/3} = \text{const}$.

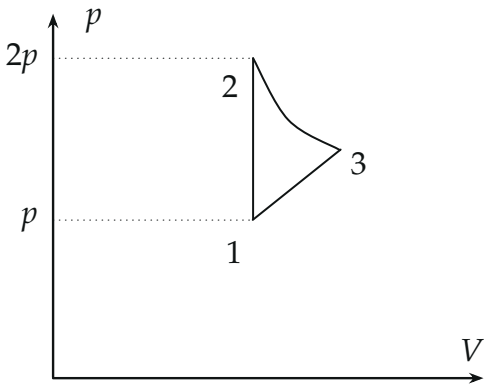


Рисунок условия

▲ **Решение. Что происходит.** Теплоту газ получает только на изохоре 1–2 (температура растёт). На адиабате 2–3 теплообмена нет. На участке 3–1 газ сжимается вдоль прямой через начало координат, температура падает, и газ отдаёт теплоту. Главная идея: выразить всё через p_0V_0 состояния 1; нужен лишь объём V_3, а точка 3 лежит и на адиабате, и на прямой $p = \alpha V$.

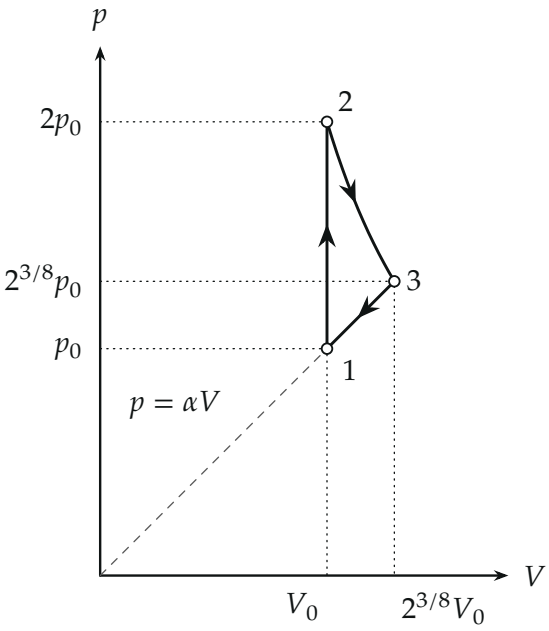
Обозначения. Состояние 1: $(p_0,\, V_0)$; состояние 2: $(2p_0,\, V_0)$; состояние 3: $(p_3,\, V_3)$. Число молей ν. Для одноатомного газа внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV$ (по уравнению Клапейрона — Менделеева $pV = \nu RT$).

1. Объём в состоянии 3. Точки 2 и 3 лежат на одной адиабате, поэтому $2p_0V_0^{5/3} = p_3V_3^{5/3}$. Точки 1 и 3 лежат на одной прямой $p = \alpha V$, поэтому $p_0 = \alpha V_0$ и $p_3 = \alpha V_3$. Подставим в уравнение адиабаты:

$$2\alpha V_0 \cdot V_0^{5/3} = \alpha V_3 \cdot V_3^{5/3} \quad \Rightarrow \quad V_3^{8/3} = 2V_0^{8/3} \quad \Rightarrow \quad V_3 = 2^{3/8}V_0,$$

$$p_3 = \alpha V_3 = 2^{3/8}p_0.$$

Значение α сократилось. Произведение $p_3V_3 = 2^{3/4}\,p_0V_0 \approx 1{,}68\,p_0V_0$.



Цикл по вычисленным точкам (масштаб: $p_0 = V_0 = 1$). Прямая 3–1 продолжена пунктиром до начала координат

2. Получаемая теплота. На изохоре 1–2 работа равна нулю, и по первому началу термодинамики вся теплота идёт на нагрев:

$$Q_н = Q_{12} = U_2 - U_1 = \tfrac{3}{2}\,(2p_0V_0 - p_0V_0) = \tfrac{3}{2}\,p_0V_0 > 0.$$

Адиабата 2–3: $Q_{23} = 0$.

3. Отдаваемая теплота на участке 3–1. Запишем первое начало термодинамики для газа между состояниями 3 и 1: $Q_{31} = (U_1 - U_3) + A_{31}$. Изменение внутренней энергии: $U_1 - U_3 = \frac{3}{2}(p_0V_0 - p_3V_3) = \frac{3}{2}p_0V_0\,(1 - 2^{3/4})$. Работа газа — площадь под прямой 3–1; газ сжимается, поэтому она отрицательна:

$$A_{31} = \frac{p_3 + p_0}{2}(V_0 - V_3) = \frac{\alpha}{2}(V_0^2 - V_3^2)$$
$$= \frac{1}{2}(p_0V_0 - p_3V_3) = \frac{1}{2}p_0V_0\,(1 - 2^{3/4}).$$

Сложим:

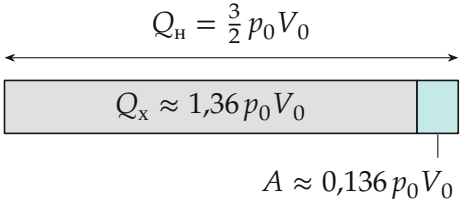
$$Q_{31} = p_0V_0\,(1 - 2^{3/4})\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = -2p_0V_0\,(2^{3/4} - 1),$$
$$Q_\text{х} = -Q_{31} = 2p_0V_0\,(2^{3/4} - 1) \approx 1{,}36\,p_0V_0.$$

Обратите внимание: в КПД входит только теплота, действительно полученная и действительно отданная, поэтому надо убедиться, что на всём участке 3–1 газ ничего не получает. Вдоль $p = \alpha V$ малый шаг даёт $2\alpha V\,dV = \nu R\,dT$, то есть $p\,dV = \frac{1}{2}\nu R\,dT$ и $\delta Q = \frac{3}{2}\nu R\,dT + \frac{1}{2}\nu R\,dT = 2\nu R\,dT$. Теплоёмкость постоянна и положительна, а T убывает от T_3 до T_1: теплота отдаётся на всём участке.

4. КПД. Полезная работа цикла равна $Q_\text{н} - Q_\text{х}$:

$$\eta = 1 - \frac{Q_\text{х}}{Q_\text{н}} = 1 - \frac{2\,(2^{3/4} - 1)}{3/2} = 1 - \frac{4}{3}(2^{3/4} - 1)$$
$$= \frac{3 - 4\,(2^{3/4} - 1)}{3} = \frac{7 - 4\cdot 2^{3/4}}{3} \approx 0{,}091.$$

Проверка. Второй способ — через работу цикла: $A_{12} = 0$, $A_{23} = U_2 - U_3 = \frac{3}{2}p_0V_0\,(2 - 2^{3/4})$, A_{31} найдена выше. Сумма $A = p_0V_0\,(\frac{7}{2} - 2\cdot 2^{3/4}) \approx 0{,}136\,p_0V_0$, и $A/Q_\text{н} = (7 - 4\cdot 2^{3/4})/3$ — тот же КПД. Предел: цикл работает между $T_\text{min} = T_1$ и $T_\text{max} = T_2 = 2T_1$, КПД Карно $1 - \frac{1}{2} = 0{,}5$, а наш цикл даёт $0{,}091 < 0{,}5$, как и должно быть.



Баланс энергии цикла: полученная теплота делится на отданную холодильнику и полезную работу

Физический смысл: работа расширения на адиабате почти компенсируется работой сжатия на прямой 3–1 (площадь цикла узкая), поэтому почти вся теплота уходит холодильнику.

Ответ. $\eta = \dfrac{3 - 4\left(2^{3/4} - 1\right)}{3} \approx 0{,}09.$